Frank András

KOMBINATORIKUS OPTIMALIZÁLÁS, IV:

KOMBINATORIKUS OPTIMALIZÁLÁSI STRUKTÚRÁK

2013. május 14.

ELTE TTK, Operációkutatási Tanszék

1. Fejezet

IRÁNYÍTATLAN GRÁFOK KONZERVATÍV SÚLYOZÁSAI

Irányított gráfokban fontos kérdés volt egy éleken adott w súlyfüggvényről eldönteni, hogy létezik-e negatív össz-súlyú irányított kör. Akkor neveztük a w-t konzervatívnak, ha nem létezik ilyen kör, és igazoltuk, hogy a konzervativitás szükséges és elegendő feltétele egy π megengedett potenciálnak nevezett függvény létezése a csúcsokon, amelyre $\pi(v) - \pi(u) \leq w(uv)$ minden uv élre. Ráadásul a π egészértékűnek is választható, amennyiben w az. A tétel (nemtriviális iránya) könnyen látható abból, hogy w konzervativitása esetén, ha $\pi(v)$-t minden v csúcsban a v-ben végződő legfeljebb n (csúcsszám) élű séták súlyának minimumaként definiáljuk, akkor megengedett potenciált kapunk. Ráadásul, $k = 1, 2, \ldots, n$-re egyszerű rekurzióval könnyen számolhatjuk a v-ben végződő legfeljebb k-élű séták súlyának minimumát.

Mi a helyzet irányítatlan gráfok esetén? Legyen a $G = (V, E)$ irányítatlan gráf élhalmazán adva egy w súlyfüggvény. A w súlyozásról azt mondjuk, hogy **konzervatív**, ha $\widetilde{w}(C) \geq 0$ teljesül G minden C körére, azaz nincs negatív össz-súlyú, (röviden negatív) kör. Hogyan jellemezhető irányítatlan esetben egy súlyfüggvény konzervativitása? Talán meglepő módon ez az irányítatlan változat jóval nehezebb, egyszersmind érdekesebb is, mint az irányított. Megjegyezzük mindenesetre, hogy az a talán kézenfekvőnek tűnő visszavezetés, amelyben minden uv élt két ellentétes irányú, $w(uv)$ súlyú irányított éllel helyettesítünk nem működik, mert így egy negatív súlyú irányítatlan élből egy két élű negatív irányított kört hozunk létre.

1.1 A konzervativitás jellemzése

Az alábbiakban azt a speciális esetet tekintjük, amikor w csak $+1, -1$ értékeket vesz fel, miután több alkalmazás erre az esetre vezethető vissza. A következő ártatlanul hangzó lemma, amint kiderül, az egész elmélet sarokköve.

Lemma 1.1.1 (Sebő) *Legyen $G = (V, U; E)$ egyszerű páros gráf, amelynek legalább három pontja van és legyen $w : E \to \{+1, -1\}$ olyan konzervatív súlyozás, hogy bármely két olyan pont között, amely G-nek ugyanabban a pontosztályában van, létezik negatív út. Ekkor G fa és $w \equiv -1$.*

Biz. Pontszám szerinti indukciót használunk. Könnyen látszik, hogy a lemma állítása igaz, ha a gráfnak három pontja van. Tegyük ezért fel, hogy $|V \cup U| \geq 4$. Legyen P olyan út, amelynek w-súlya a legnegatívabb, és ezen belül, P-nek minimális számú éle van. Mivel a gráfban van negatív út, P-nek legalább egy éle van. Jelölje t a P út egyik végpontját és xt az ezzel szomszédos élét.

Állítás 1.1.1 *Az xt él a gráf egyetlen t-vel szomszédos éle.*

Biz. A P választása miatt P-nek mindegyik t-ből induló $P[y, t]$ részútja negatív, speciálisan $w(xt) = -1$. Tegyük fel indirekt, hogy létezik egy másik t-vel szomszédos él és jelöljük ezt tz-vel.

Ekkor $w(tz)$ nem lehet negatív, mert ha $z \in P$, úgy $P[z, t] + tz$ negatív kört alkotna, ellentétben a w konzervativitásával, ha pedig $z \notin P$, akkor $P' := P + tz$ olyan út lenne, amelyre $\widetilde{w}(P') < \widetilde{w}(P)$ volna, ellentétben $\widetilde{w}(P)$ minimalitásával. Így tehát $w(tz) = 1$.

Mivel x és z szomszédja t-nek, így G-nek ugyanazon pontosztályában vannak, ezért a lemma feltevése szerint létezik x és z között egy R negatív út. Tegyük fel, hogy $\widetilde{w}(R)$ minimális. Az R szükségképpen használja a t pontot, mert különben $R + xt + tz$ negatív kör volna. Az R-nek valójában az xt élt is használnia kell, mert ha nem tenné, akkor $R[x, t] + xt$ kört alkotna, így $w(xt) = -1$ folytán $\widetilde{w}(R[x, t]) \geq 1$, és ekkor az R út $R[x, t]$ szakaszát az xt élre cserélve egy olyan R' xz-utat kapnánk, amelyre $\widetilde{w}(R') < \widetilde{w}(R)$. Tehát R használja az

xt élt. Miután a gráf páros, így $\widetilde{w}(R[x,z])$ páros szám, tehát legfeljebb -2. Ezért $\widetilde{w}(R[t,z]) \leq -1$ és így a $C := R[t,z] + tz$ kör súlya 0.

Ha a P útnak és az $R[t,z]$ útnak van t-től különböző közös pontja, akkor legyen y a P úton t-ből indulva a legelső ilyen. Miután $\widetilde{w}(P[t,y]) < 0$, így a C körön mindkét t és y közötti út pozitív, ellentmondásban azzal, hogy $\widetilde{w}(C) = 0$. Tehát P-nek és $R[t,z]$-nek egyedül a t pont közös pontja, azaz $P + R[t,z]$ út, de ez megint csak lehetetlen, mert $\widetilde{w}(R[t,z]) < 0$ miatt ekkor nem P volna a legnegatívabb út, és ezzel az Állítás bizonyítása teljes. •

Töröljük el a gráfból a t pontot. Mivel t-ből csak egy él megy ki, a lemma feltételei továbbra is fennállnak, ezért indukcióval a lemma következik. • •

A konzervativitás jellemzéséhez szükségünk van egy új fogalomra. Legyen $G = (U, V; E)$ összefüggő páros gráf. Legyen $\mathcal{P}$ az $U \cup V$ halmaz egy olyan partíciója, amely az U-nak egy $\mathcal{U} := \{U_1, \ldots, U_p\}$ és a V-nek egy $\mathcal{V} := \{V_1, \ldots, V_q\}$ partíciójából tevődik össze, ahol $p \geq 1, q \geq 1$ és mindegyik partíció rész nemüres. Azt mondjuk, hogy $\mathcal{P}$ a gráf **fa-kompozícója**, ha $\mathcal{P}$ mindegyik tagját egy pontra húzva, majd a keletkező párhuzamos él-csomagok mindegyikét egy-egy éllel helyettesítve fát kapunk. Egy $\mathcal{P}$ fa-kompozícó a G-nek $|\mathcal{P}| - 1$ élidegen vágását határozza meg, melyek keresztezés-mentesek. Adott $F \subseteq E$-re $\mathcal{P}$ F-**megengedett**, ha a G minden $\mathcal{P}$ által meghatározott vágása F-nek legfeljebb egy elemét tartalmazza.

TÉTEL 1.1.2 *Legyen $G = (U, V; E)$ egy legalább 2 pontú összefüggő páros gráf. Legyen $w : E \rightarrow \{+1, -1\}$ adott költségfüggvény és jelölje F a negatív élek halmazát. A w akkor és csak akkor konzervatív, ha G-nek létezik F-megengedett fa-kompozícója, azaz egy olyan $\mathcal{P}$ fa-kompozícó, hogy G-ben a $\mathcal{P}$-hez tartozó valamennyi vágás legfeljebb egy negatív élt tartalmaz.*

Biz. Tegyük fel először, hogy a $\mathcal{P}$ fa-kompozícó F-megengedett. Mivel egy C körnek és egy vágásnak páros sok közös éle van, és a $\mathcal{P}$-hez tartozó mindegyik vágásban legfeljebb egy negatív él van, a C kör költsége nem-negatív.

Megfordítva, tegyük fel, hogy w konzervatív. Feltehetjük, hogy G egyszerű, mert ha nem volna az, akkor minden párhuzamos élcsomagot egyetlen éllel helyettesíthetünk, amelynek súlya annak megfelelőáen -1 vagy $+1$ egy, hogy az élcsomag tartalmaz-e -1-es élt vagy sem.

Az állítás triviális, ha $|U \cup V| = 2$, így feltesszük, hogy $|U \cup V| \geq 3$. Amennyiben a G bármely két egy osztályban lévő csúcs között létezik negatív út, akkor a Sebő lemma szerint G maga fa, és ilyenkor az egypontú halmazok által alkotott partíció F-megengedett fa-kompozíció. Tegyük most fel, hogy a G egyik pontosztályában létezik két olyan u és v csúcs, amelyre minden uv-út nem-negatív. Ekkor az u és v pontokat egy ponttá összehúzva nem keletkezik negatív kör. Indukció alapján a kapott G' gráfnak létezik $\mathcal{P}'$ fa-kompozíciója a kívánt tulajdonságokkal. Ekkor a G-nek az a fa-kompozícója, amely $\mathcal{P}'$-ből keletkezik az összehúzott csúcs felfújásával a G F-megengedett fa-kompozícióját eredményezi. •

Feladat 1.1 *Mutassuk meg, hogy ha az* 1.1.2 *tételben w konzervatív, akkor van olyan $\mathcal{P}$ fa-kompozícó is, hogy a G-nek ehhez tartozó vágásai mind pontosan egy negatív élt tartalmaznak.*

TÉTEL 1.1.3 *Legyen $G = (V, U; E)$ páros gráf és $w : E \rightarrow \{+1, -1\}$ súlyozás. A következők ekvivalensek:*
(1) *w konzervatív.*
(2) *Létezik a V-nek olyan $\{V_1, \ldots, V_q\}$ partíciója nemüres halmazokra, hogy minden $i = 1, \ldots, k$ esetén a $G - V_i$ valamennyi komponensébe legfeljebb egy negatív él lép be.*
(3) *G-ben léteznek olyan élidegen vágások, melyek mindegyike egyetlen negatív élt tartalmaz és mindegyik negatív él benne van egy ilyen vágásban.*

(Figyeljük meg, hogy a (3) feltétel, G párossága miatt azzal ekvivalens, hogy G élhalmaza felbontható olyan vágásokra, melyek mindegyike legfeljebb egy negatív élt tartalmaz.)

Biz. (3) $\rightarrow$ (1). Legyen C kör és tekintsük a (3) által biztosított élidegen vágásokat. C bármely negatív éle benne van az egyik vágásban. De ekkor C-nek ugyanabban a vágásban van egy másik, szükségképpen pozitív éle is. Vagyis C minden negatív éléhez hozzárendelhetünk egy pozitív élét, és különbözőhöz különbözőt, hiszen a vágások élidegenek. Ebből $\widetilde{w}(C) \geq 0$ adódik.

(2) $\rightarrow$ (3). Tekintsük az összes olyan vágást, amelyet $G - V_i$ $(i = 1, \ldots, q)$ egy komponense határoz meg. Ezek a vágások particionálják E-t és mindegyikük legfeljebb egy negatív élt tartalmaz.

(1) $\rightarrow$ (2). Jelölje F a -1 súlyú élek halmazát. A 1.1.2 tétel szerint létezik egy F-megengedett fa-kompozíció. Ennek a V-be eső tagjai a V-nek a keresett partícióját adják. •

TÉTEL 1.1.4 *Legyen $G = (V, E)$ irányítatlan gráf és $w : E \rightarrow \{+1, -1\}$ súlyozás. A következők ekvivalensek:*
(1) *w konzervatív.*
(2) *Létezik V-nek egy olyan $\{V_1, \ldots, V_q\}$ partíciója nemüres halmazokra, hogy semelyik V_i sem feszít negatív élt, minden $i = 1, \ldots, q$ esetén a $G - V_i$ valamennyi komponensébe legfeljebb egy negatív él lép be.*
(3) *G-ben léteznek olyan (nem feltétlenül különböző) vágások, amelyek mindegyike egyetlen negatív élt tartalmaz, minden pozitív él legfeljebb két vágásban van és minden negatív él pontosan két vágásban van.*

Biz. A gráf minden élét osszuk fel egy új ponttal, és jelöljük az osztópontok halmazát U-val. Alkalmazzuk a megelőző tételt a keletkező gráfra. •

A szakasz lezárásaként bemutatjuk az 1.1.3 és 1.1.4 tételek egy-egy érdekes alkalmazását.

1.1.1 A Berge-Tutte formula

A Berge-Tutte formula azt állítja, hogy egy $G = (V, E)$ irányítatlan gráfban a független élek maximális $\nu(G)$ száma egyenlő a $\min\{(|V| + |X| - q(X))/2 : X \subseteq V\}$ értékkel, ahol $q(X)$ jelöli a $G - X$ páratlan pontszámú komponenseinek a számát. Könnyen látszik, hogy a Berge-Tutte formula ekvivalens az alábbival.

TÉTEL 1.1.5 *G-ben létezik olyan M párosítás és $X \subseteq V$ részhalmaz, amelyekre fennáll, hogy*
(A) *M fedi X minden pontját,*
(B) *X nem feszít M-beli élt,*
(C) *$G - X$ minden komponensében legfeljebb egy olyan pont van, amelyet nem fed M.*

Biz. Legyen M tetszőleges maximális párosítás. Vegyünk fel egy új s pontot és kössük össze az M által fedetlen pontokkal. Legyen w az a súlyozás, amely -1 az M elemein valamint az új éleken és $+1$ a többi élen. Ez konzervatív, mert ha volna negatív kör, akkor az szükségképpen tartalmazná az s pontot, és az s-t kihagyva belőle egy növelő alternáló utat kapnánk, ellentétben M maximális választásával.

Tekintsük az előző tétel által biztosított partícióját V-nek, és legyen $X + s$ az s pontot tartalmazó partíció rész. Az 1.1.4 tétel (2) pontjában felsorolt tulajdonságokból következik, hogy X teljesíti az (A), (B), (C) kívánalmakat. •

1.1.2 Élidegen utak síkgráfban

A következő alkalmazás az élidegen utak problémájára vonatkozik. Korábban már láttuk (Hu, Rothschild és Winston tétel), hogy ha a G gráf a H igénygráf éleivel kiegészítve Euler-féle és H két csomag párhuzamos élből áll, akkor a vágás feltétel nemcsak szükséges, hanem elegendő is. Az alábbi tételben $G + H$ Eulersége mellett $G + H$ síkbeliségét írjuk elő.

TÉTEL 1.1.6 (Seymour) *Legyen a $G = (V, E)$ és $H = (V, F)$ gráf olyan, hogy $G + H = (V, E + F)$ síkbarajzolható Euler-gráf. Ekkor a H igénygráf által a G gráfban meghatározott élidegen út problémának akkor és csak akkor létezik megoldása, ha a vágás feltétel teljesül, azaz ha $d_G(X) \geq d_H(X)$ minden $X \subseteq V$-re.*

Biz. Tekintsük a $G + H$ gráf síkbeli duális gráfját. Ez $G + H$ Eulersége miatt páros gráf. A duálisban az E-nek megfelelő élek súlyát definiáljuk 1-nek, míg az F-nek megfelelő élek súlyát definiáljuk -1-nek. A vágás feltétel pontosan azzal ekvivalens, hogy az így definiált w súlyozás konzervatív. Az 1.1.3 tétel szerint létezik a duálisban $|F|$ élidegen vágás úgy, hogy midegyik egy negatív élt tartalmaz. Ez azt jelenti, hogy $G + H$-ban létezik $|F|$ élidegen kör úgy, hogy mindegyik pontosan egy F-beli élt tartalmaz, vagyis a szóbanforgó élidegen út problémának van megoldása. •

1.2 A kínai postás probléma: T-kötések, T-vágások

Harmadik alkalmazásként megvizsgáljuk a kínai postás problémáját. Egy $G = (V, E)$ összefüggő irányítatlan gráf éleit kell bejárnunk megadott pontból kiindulva és végül oda visszatérve úgy, hogy a többször bejárt élek száma minimális legyen. Közismert, hogy amennyiben a gráf Euler féle, úgy létezik olyan bejárása, amelyben minden élen pontosan egyszer haladunk végig. Ilyenkor tehát nincs mit optimalizálni.

Ha a gráfban léteznek páratlan fokú pontok, akkor szükségképpen néhány élen többször kell végighaladnunk. Képzeljünk el egy bejárást, és helyettesítsünk minden élt annyi párhuzamos éllel, ahányszor végigmentünk rajta. Ekkor nyilván Euler gráfot kapunk. Megfordítva, ha minden élt pozitív számú párhuzamos éllel helyettesítünk úgy, hogy Euler gráfot kapjunk, akkor a kapott Euler gráf egy Euler-sétája az eredeti gráf olyan bejárásának felel meg, amelyben minden élen pontosan annyiszor haladunk végig, ahány éllel helyettesítettük.

Ezen meggondolás alapján a kínai postás problémája a következővel ekvivalens: *Adott összefüggő gráfot tegyünk Eulerrá minimális számú párhuzamos él behúzásával.* Figyeljük meg, hogy nem érdemes egy élnek egynél több párhuzamos példányát bevenni, mert ekkor két új párhuzamos élt kihagyva az Eulerságot nem rontjuk el és kisebb növelést kapunk. Tehát a feladat azzal ekvivalens, hogy *adott összefüggő gráfot tegyünk Eulerrá minimális számú él párhuzamos megduplázásával.* A kérdést még egy kicsit általánosítjuk, és azt válaszoljuk meg. Legyen most a V ponthalmazon $H = (V, F)$ egy másik gráf, amely összefüggő. Az általánosított feladatban *a H gráfot kell Eulerrá tenni minimális számú G-beli él hozzávételével.* (Ehhez a G összefüggőségét nem is kell feltételezni). Világos, hogy $G = H$ esetén visszakapjuk a kínai postás problémát.

A feladat megoldásához figyeljük először is meg, hogy a G éleinek egy J részhalmazát H-hoz adva pontosan akkor kapunk Euler gráfot, ha a $d_J(v)$ és $d_F(v)$ fokszámok paritása minden v pontra megegyezik. Ez azt jelenti, hogy a H gráfot nem is kell ismernünk, csupán a H-ban páratlan fokú pontok T halmazát. Ez indokolja a következő fogalmak bevezetését.

Legyen $G = (V, E)$ irányítatlan gráf és $T \subseteq V$ a pontok egy páros elemszámú részhalmaza. A (G, T) párt néha **graft** -nak nevezik. Pontok X részhalmazát T**-páratlannak** (T**-párosnak**) nevezünk, ha $|X \cap T|$ páratlan (páros). A T elemei a T-pontok. Élek J részhalmazát T**-kötés**-nek hívjuk, ha $d_J(v)$ pontosan akkor páratlan, ha $v \in T$. Itt $d_J(v)$ azon J-beli élek számát jelöli, melyek szomszédosak v-vel. A G egy $[X, V - X]$ vágását a T**-vágásnak** hívjuk, ha X T-páratlan.

A minimális T-kötés elemszámát jelölje $\tau(G, T)$. Általánosabban, egy teszőleges $w : E \to \mathbf{R}$ súlyfüggvényre $\tau_w(G, T)$ jelöli a T-kötések minimális súlyát.

1.2.1 T-kötések elemi tulajdonságai

A következőkben áttekintjük a T-kötések néhány egyszerű tulajdonságát.

Állítás 1.2.1 *Élek egy J részhalmaza akkor és csak akkor T-kötés, ha J előáll élidegen körök és $|T|/2$ darab olyan út egyesítéseként, melyek végpontjai mind különbözőek és T-ben vannak.*

Biz. Világos, hogy ha J az adott alakban van, akkor T-kötés. Megfordítva, legyen J T-kötés. Adjunk G-hez egy s új pontot és új élek egy $N := \{st : t \in T\}$ halmazát. Ekkor $J \cup N$ Euler gráf, így élidegen körök uniójára bomlik. Kihagyva N elemeit megkapjuk J kívánt felbontását. •

Állítás 1.2.2 *Ha J T-kötés és B T-vágás, akkor közös részük páratlan sok elemből áll.*

Biz. Legyen $B = [X, V - X]$ az X ponthalmaz által meghatározott T-vágás. Mivel $|X \cap T|$ páratlan és J T-kötés, az $S := \sum[d_J(v) : v \in X]$ összeg páratlan. Továbbá $S = 2|E(X) \cap J| + |J \cap B|$ és ezért $|J \cap B|$ is páratlan. •

Állítás 1.2.3 *G gráfban akkor és csak akkor létezik T-kötés, ha G minden komponense T-páros.*

Biz. Legyen K T-páratlan komponense G-nek. Ekkor a $[K, V - K]$ vágás üres T-vágás. Az 1.2.2 állítás szerint G-nek nem létezhet T-kötése.

A fordított irány bizonyításához feltehetjük, hogy G összefüggő. $|T|/2$ szerinti indukciót használunk. Ha $T = \emptyset$, az üres halmaz T-kötés. Legyen $|T| \geq 2$, $s, t \in T$ és $T' := T - \{s, t\}$. Az indukciós feltevés alapján létezik G-ben T'-kötés. Miután G összefüggő, létezik egy P út s és t között. Könnyen belátható, hogy J' és P szimmetrikus differenciája T-kötés. •

Állítás 1.2.4 *Éleknek egy olyan F részhalmaza, amely minden T-kötést metsz, tartalmaz T-vágást.*

Biz. A feltevés alapján a $G - F$ részgráfban nincsen T-kötés. Az előbbi állítás szerint $G - F$ valamely K komponense T-páratlan. Vagyis $[K, V - K]$ G-nek T-vágása, amely teljesen F-ben van. •

Az alábbiakban $X \ominus Y$ jelöli az X és Y halmazok szimmetrikus differenciáját. A következő állítás igazolása szintén egyszerű gyakorlat.

Állítás 1.2.5 *Legyen T_1 és T_2 két páros elemszámú részhalmaza V-nek és legyen J_i T_i-kötés ($i = 1, 2$). Ekkor $J_1 \ominus J_2$ $(T_1 \ominus T_2)$-kötés. Speciálisan, két T-kötés szimmetrikus differenciája ciklus, továbbá egy T-kötés és egy ciklus szimmetrikus differenciája T-kötés.* •

1.2.2 Minimális elemszámú T-kötések

A minimális T-kötések elemszámára vonatkozó eredményeket a konzervatív ± 1-súlyozásokkal való szoros kapcsolatuk teszi lehetővé. Adott J T-kötéshez rendeljünk hozzá egy w_J ± 1-súlyozást a következőképpen.

$$e \in J \text{ esetén } w_J(e) := -1, \text{ míg } e \in E - J \text{ esetén } w_J(e) := 1. \tag{1.1}$$

Állítás 1.2.6 *Egy J T-kötés akkor és csak akkor minimális elemszámú, ha w_J konzervatív.*

Biz. Ha J minimális elemszámú T-kötés, akkor w_J konzervatív, ugyanis ha létezne C negatív kör, akkor C és J szimmetrikus differenciája olyan T-kötés lenne, amelynek elemszáma kisebb, mint J elemszáma ellentétben a J minimalitására tett feltevéssel. A megfordításhoz azt igazoljuk, hogy ha létezik J-nél kisebb elemszámú I T-kötés, akkor w_J nem konzervatív. Valóban, mivel két T-kötés szimmetrikus differenciája élidegen körök uniója, így $|I| < |J|$ miatt a $I \ominus J$-ben az egyik ilyen C körben szükségképpen több J-beli él van, mint I-beli, ami épp azt jelenti, hogy a C kör w_J súlya negatív, vagyis w_J nem konzervatív. •

Nemsokára látni fogjuk ezen állítás súlyozott esetre vonatkozó általánosítását is (1.4.3 állítás). Az alábbi eredmény választ ad a minimális elemszámú T-kötésre vonatkozó kérdésre.

TÉTEL 1.2.1 *$G = (V, E)$ összefüggő gráfban akkor és csak akkor létezik legfeljebb γ elemű T-kötés, ha V bármely $\{V_1, \dots, V_q\}$ nemüres részekből álló partíciójára*

$$\sum [q_T(V_i) : i = 1, \dots, k] \leq 2\gamma, \tag{1.2}$$

ahol $q_T(X)$ jelöli az X elhagyásával keletkező T-páratlan komponensek számát.

Biz. Szükségesség. Adott $\{V_1, \dots, V_q\}$ partíció és J legfeljebb γ elemű T-kötés esetén a J elemszáma legalább akkora, mint a V_i részek között vezető J-élek száma, ami $\sum_i d_J(V_i)/2$. Mivel egy $G - V_i$ minden T-páratlan komponensébe páratlan sok, és így legalább egy J-él vezet V_i-ből, ezért $d_J(V_i) \geq q_T(V_i)$, amiből $2\gamma \geq 2|J| \geq \sum_i d_J(V_i) \geq \sum_i q_T(V_i)$, tehát (1.2) következik.

Elegendőség. Tételezzük fel, hogy (1.2) teljesül és legyen J minimális elemszámú T-kötés. Az 1.2.6 állítás szerint w_J konzervatív, így az 1.1.4 tétel szerint létezik V-nek egy olyan $\{V_1, \dots, V_q\}$ partíciója, amelynek semelyik V_i tagja sem feszít negatív élt és minden $i = 1, \dots, k$ esetén a $G - V_i$ valamennyi komponensébe legfeljebb egy negatív él lép be. Az így keletkező komponensek közül pontosan azok T-páratlanok, amelyekbe egy negatív él megy (ugyanis paritási megfontolás miatt tetszőleges ponthalmaz pontosan akkor T-páratlan, ha J páratlan sok éllel lép bele.)

Mivel $|J|$ negatív él van, és ezek mindegyike két olyan komponenst határoz meg, amelybe belelép, azt kapjuk, hogy $\sum [q_T(V_i) : i = 1, \dots, k] = 2|J|$, amiből (1.2) alapján $|J| \leq \gamma$ adódik. •

Figyeljük meg, hogy a kínai postás esetében, amikor T a G páratlan fokú pontjainak halmaza, egy C halmaz pontosan akkor T-páratlan, ha $d_G(C)$ páratlan. Így nyerjük:

Következmény 1.2.2 *$G = (V, E)$ összefüggő gráfot akkor és csak akkor lehet legfeljebb γ élének párhuzamos megduplázásával Euler gráffá tenni, ha V bármely $\{V_1, \dots, V_q\}$ nemüres részekből álló partíciójára $\sum [q_d(V_i) : i = 1, \dots, k] \leq 2\gamma$, ahol $q_d(X)$ jelöli az X elhagyásával keletkező páratlan fokszámú* **(!)** *komponensek számát.* •

Gyakorlat 1.2 *Alkalmazzuk az* 1.2.1 *tételt a $T := V$, $\gamma := |V|/2$ speciális esetre, és vezessük le ebből Tutte tételét, miszerint egy $G = (V, E)$ gráfban akkor és csak akkor létezik teljes párosítás, ha bármely X ponthalmazt kihagyva legfeljebb $|X|$ páratlan elemszámú komponens keletkezik.*

TÉTEL 1.2.3 (Seymour) *Páros gráfban az élidegen T-vágások maximális ν_T száma egyenlő a T-kötések minimális τ_T elemszámával.*

Biz. Mivel minden T-kötésnek és T-vágásnak páratlan sok közös eleme van, így $\nu_T \leq \tau_T$ fennáll. Legyen most J minimális T-kötés és tekintsük az (1.1)-ban definiált w_J konzervatív súlyozást. Az 1.1.3 tételből az eredmény adódik. •

Feladat 1.3 *Igazoljuk, hogy egy $G = (V, E)$ sík Euler gráfban az élidegen páratlan körök maximális száma egyenlő a $\min\{i(X) + i(V - X) : X \subseteq V\}$ értékkel, ahol $i(X)$ az X által feszített élek száma.*

Feladat 1.4 *Igazoljuk Lovász tételét, mely szerint tetszőleges gráf esetén a T-kötések minimális τ_T elemszáma egyenlő félig diszjunkt módon pakolható T-vágások maximális számának felével.* (A félig diszjunktság azt jelenti, hogy minden él legfeljebb két vágáshoz tartozhat.)

A T-vágás fogalmának egyik lehetséges relaxációja a T-határ fogalma. Legyen $V_1, \dots, V_t$ a csúcshalmaz egy partíciója T-páratlan halmazokra. Ekkor a különböző részek között vezető élek halmazát T-**határnak** nevezzük. A t szám nyilván páros, melynek felét a T-határ **értéké**-nek nevezzük. Figyeljük meg, hogy egy T-vágás tekinthető egy 1 értékű T-határnak.

Feladat 1.5 *Igazoljuk, hogy tetszőleges gráf esetén a T-kötések minimális τ_T elemszáma egyenlő az élidegen T-határok maximális összértékével.*

1.3 Minimális súlyú T-kötések és alkalmazásaik

T-kötésekkel kapcsolatban fentebb választ adtunk a minimális elemszámú T-kötés problémájára. Általánosabb célunk egy

$$\text{minimális súlyú } T\text{-kötés meghatározása.} \tag{1.3}$$

Ezt a feladatot minimális súlyú teljes párosítás meghatározására vezetjük majd vissza. Előbb azonban bemutatunk néhány példát, ami a (1.3) feladat speciális esete.

1.3.1 Konzervatív súlyozások

Adott $G = (V, E)$ gráfban a $w : E \to \mathbf{R}$ súlyozásra döntsük el, hogy konzervatív-e vagy sem.

Legyen $T := \emptyset$. Ekkor a T-kötések pontosan a ciklusok (:=Euler-gráfok= élidegen körök uniója). Mivel az üres halmaz T-kötés, amelynek súlya 0, w pontosan akkor konzervatív, ha a minimális T-kötés súlya 0.

1.3.2 A max ciklus és a max vágás probléma

Adott G és w, határozzuk meg a maximális w-súlyú Euler részgráfot (ciklust).

Ez a feladat a $T = \emptyset$-ra a maximális súlyú T-kötés problémája, amely a súlyok negálásával (1.3) alakúvá válik. Síkgráfokra, a gráf duálisát véve, a maximális súlyú ciklus problémája ekvivalens a maximális súlyú vágás meghatározásával (amely feladat amúgy tetszőleges gráfra NP-teljes). Ez viszont olyan minimális súlyú élhalmaz meghatározásával ekvivalens, amelynek elhagyása a gráfot páros gráffá teszi, azaz, amely minden páratlan kört lefog.

1.3.3 Legrövidebb utak

Legyen $G = (V, E)$ gráfban s és t két adott pont és $w : E \to \mathbf{R}$ konzervatív súlyfüggvény. Keressünk minimális súlyú egyszerű utat s és t között.

Ha semmilyen megkötést sem teszünk w-re, akkor a feladat NP-teljes, mert a (közismerten NP-teljes) Hamilton út feladat speciális esetként megfogalmazható. Irányított gráfban a legrövidebb út probléma kezelhető, ha a súlyozás konzervatív. Ezért kézenfekvő az irányítatlan esetben is a legrövidebb út feladatot konzervatív súlyozásra tekinteni.

Ha olyan szerencsések vagyunk, hogy w nem-negatív, akkor a feladat visszavezethető az irányított esetre úgy, hogy minden élt két ellentétesen megirányított éllel helyettesítünk melyek súlya az eredeti irányítatlan él súlya. Ez a redukció azonban tetszőleges konzervatív súlyzás esetén nem működik, mert akkor egy negatív élt egy negatív két-élű körrel kellene helyettesítenünk, elrontva ezáltal a konzervativitást.

Legyen $T := \{s, t\}$. Ekkor tetszőleges T-kötés egy s-t és t-t összekötő útból áll és néhány élidegen körből. Mivel azonban w konzervatív, van olyan minimális w-súlyú T-kötés, amely egyetlen útból áll.

1.3.4 A kínai postás költséges változata

Egy postásnak végig kell mennie egy városrész minden utcáján úgy, hogy a postahivatalból indul és oda ér vissza. Keressünk olyan bejárást, amelynek az össz-hossza a lehető legkisebb.

A fentiek alapján a kínai postás költséges problémája azzal ekvivalens, hogy megadott G gráfot minimális össz-súlyú olyan él hozzáadásával kell Euler-félévé tenni, amely eredeti éllel párhuzamos, ez pedig egy minimális súlyú T-kötés feladat.

1.3.5 Teljes párosítások

Végül válasszuk T-t az egész V-nek. Ekkor egy teljes párosítás T-kötés, bár lehetnek más T-kötések is. Mindenesetre G-nek akkor és csak akkor van teljes párosítása, ha a minimális elemszámú T-kötés elemszáma $|V|/2$. Vagyis a (11.2) feladat általánosítja a teljes párosítás létezésének problémáját.

1.4 A minimális súlyú T-kötések meghatározása

A (1.3) problémát először abban az esetben oldjuk meg, amikor $w \geq 0$. Az $x, y \in T$ pontokra jelölje $\lambda(x, y)$ az x és y-t összekötő utak w-súlyának minimumát. Legyen K_T a T halmazon definiált teljes gráf és legyen $M := \{x_1y_1, x_2y_2, \ldots, x_ky_k\}$ minimális súlyú teljes párosítás K_T-ben a λ súlyozásra vonatkozólag. Legyen P_i a G-ben az x_i és y_i pontokat összekötő utak w-súlyának minimuma (azaz, $\widetilde{w}(P_i) = \lambda(x_i, y_i) \quad (i = 1, \ldots, k)$). Legyen végül

$$J_M := E(P_1) \ominus E(P_2) \ominus \ldots \ominus E(P_k), \tag{1.4}$$

ahol $\ominus$ a szimmetrikus differenciát jelöli.

TÉTEL 1.4.1 *J_M minimális súlyú T-kötés.*

Biz. Világos, hogy J_M T-kötés. Legyen J egy tetszőleges T-kötés. Az 1.2.1 állítás szerint J felbontható élidegen körökre és R_i $(i = 1, \ldots, k)$ utakra. Jelölje s_i és t_i az R_i két végpontját és legyen $M' := \{s_1t_1, s_2t_2, \ldots, s_kt_k\}$. Ekkor $\widetilde{w}(J) \geq \sum \widetilde{w}(R_i) \geq \sum \lambda(s_i, t_i) = \lambda(M') \geq \lambda(M) = \sum \widetilde{w}(P_i) \geq \widetilde{w}(J_M)$, ami mutatja J_M minimalitását. (Itt az első egyenlőtlenség azért igaz, mert w nem-negatív.) •

Térjünk most rá (1.3) megoldására tetszőleges (tehát nem feltétlenül konzervatív) w súlyozás esetén. Azt mutatjuk meg, hogy miként lehet megszabadulni egy $e = uv$ élen lévő $w(e)$ negatív súlytól. Ennek ismétlésével a feladatot a nemnegatív súlyozás esetére vezethetjük vissza. Legyen $T' := T \ominus \{u, v\}$, és legyen w' az a súlyfüggvény, amelyet w-ből úgy nyerünk, hogy az e él súlyát annak abszolút értékével helyettesítjük. Figyeljük meg, hogy a $\varphi(F) := F \ominus \{e\}$ leképezés idempotens, azaz $\varphi(\varphi(F)) = F$, amelyre J akkor és csak akkor T-kötés, ha $J' := \varphi(J)$ T'-kötés. Érvényes továbbá, hogy $\widetilde{w}'(J') = \widetilde{w}(J) + |w(e)|$. Emiatt J' pontosan akkor minimális w'-súlyú T'-kötés, ha $\varphi(J')$ minimális w-súlyú T-kötés.

Ezt a redukciós lépést tehát annyiszor kell egymás után alkalmazni, ahány negatív komponense van a kiindulási w súlyfüggvénynek. Valójában azonban e visszavezetést egyetlen redukcióba foglalhatjuk össze. Ehhez egyszerre definiálunk egy ekvivalens problémát, amelyben a súlyozás nem-negatív. Jelölje $|w|$ azt a súlyozást, amelyre $|w|(e) := |w(e)|$ minden $e \in E$ élre.

Élek valamely F részhalmazára jelölje $w' := w[F]$ a következő súlyozást: $e \notin F$ esetén $w'(e) = w(e)$, míg $f \in F$ esetén $w'(e) = -w(e)$. Jelölje N_w a negatív élek halmazát és $T_w := \{v : d_{N_w}(v) \text{ páratlan}\}$, azaz T_w azon pontok halmaza, melyek páratlan sok negatív éllel szomszédosak. Figyeljük meg, hogy N_w T_w-kötés. Definiáljuk a $\varphi_w : 2^E \to 2^E$ függvényt így; $\varphi_w(X) := X \ominus N_w$. Világos, hogy φ_w idempotens, azaz $\varphi_w(\varphi_w(X)) = X$.

Állítás 1.4.1 *φ_w bijekciót alkot a T-kötések és a $(T \ominus T_w)$-kötések között. Továbbá, ha J T-kötés és J' $(T \ominus T_w)$-kötés egymásnak felelnek meg, akkor*

$$\widetilde{w}(J) = |w|(J') + \widetilde{w}(N_w). \tag{1.5}$$

Biz. Az első rész következik az 1.2.5 állításból. Miután $J' = J \ominus N_w$, kapjuk, hogy $\widetilde{w}(J) = \widetilde{w}(J - N_w) + \widetilde{w}(J \cap N_w) = |w|(J' - N_w) + \widetilde{w}(J \cap N_w) = |w|(J') - |w|(N_w - J) + \widetilde{w}(J \cap N_w) = |w|(J') + \widetilde{w}(N_w - J) + \widetilde{w}(J \cap N_w) = |w|(J') + \widetilde{w}(N_w)$, és ebből (1.5) következik. •

Rögtön kapjuk:

Állítás 1.4.2 *Tetszőleges w súlyfüggvényre a J élhalmaz akkor és csak akkor minimális w-súlyú T-kötés ha $J' := J \ominus N_w$ minimális $|w|$-súlyú $(T \ominus T_w)$-kötés.* •

Ennek segítségével tehát a minimális súlyú T-kötés problémája egy lépésben visszavezethető a nem-negatív súlyokra vonatkozó minimális súlyú T-kötés feladatra. Speciálisan el tudjuk dönteni, hogy egy w súlyozás konzervatív-e vagy sem, hiszen w pontosan akkor konzervatív, ha a $T = \emptyset$-re nézve az üres halmaz minimális w-súlyú T-kötés.

Vizsgálatainkat minimális súlyú T-kötések egy fontos tulajdonságával zárjuk.

Állítás 1.4.3 *Tetszőleges w súlyozásra a J T-kötés akkor és csak akkor minimális w-súlyú, ha $w[J]$ konzervatív.*

Biz. Ha $w[J]$ nem konzervatív, akkor létezik egy olyan C kör, amelyre $w[J](C) < 0$, azaz, $\widetilde{w}(C \cap J) > \widetilde{w}(C - J)$. Ekkor viszont $J' = C \ominus J$ olyan T-kötés, amelyre $\widetilde{w}(J') = \widetilde{w}(J) - \widetilde{w}(C \cap J) + \widetilde{w}(C - J) < \widetilde{w}(J)$.

Megfordítva, legyen J olyan T-kötés, amelyre $w[J]$ konzervatív, és legyen J' egy tetszőleges T-kötés. Miután a $J \ominus J'$ szimmetrikus differencia ciklus, így felbomlik élidegen körök uniójára. Ha indirekt $\widetilde{w}(J') < \widetilde{w}(J)$ volna, akkor ezen körök közül legalább egyre $\widetilde{w}(C \cap J') < \widetilde{w}(C \cap J)$ állna, azaz $w[J](C) < 0$, ellentmondás. •

lkonzerv 2013. május 14.

2. Fejezet

LOKÁLIS ÉLÖSSZEFÜGGŐSÉG

A gráfelmélet előadásban megismerkedtünk Lovász leemelési tételével, amely irányítatlan gráfban a k-élösszefüggőség megőrzéséről szólt, és ennek nyomán a Watanabe-Nakamura tétellel, amely az élösszefüggőség minimális számú éllel történő növelésével foglalkozott. Ebben a részben általánosítjuk ezen eredményeket arra az esetre, amikor az egyes pontpárok közötti "lokális" élösszefüggőségre más és más előírásunk lehet.

2.1 A lokális élösszefüggőség megőrzése

Legyen $G = (V + z, E)$ irányítatlan összefüggő gráf, amelyben $\lambda(u, v) = \lambda(u, v; G)$ jelöli az u, v pontpárt elválasztó minimális vágás elemszámát, ami Menger tétele alapján az u-t és v-t összekötő élidegen utak maximális száma. E számot az u és v **lokális élösszefüggőségé**nek hívják. Egy élpárt **leemelhető**nek mondunk, ha a két él közös vége a z pont és leemelésük minden $u, v \in V$ pontpár lokális élösszefüggőségét megőrzi.

Az alábbiakban megvizsgáljuk, hogy mikor van leemelhető élpár. Feltesszük, hogy V-nek legalább két pontja van, és hogy a z szomszédjai között a lokális élösszefüggőség legalább 2, ami azzal ekvivalens, hogy:

$$\text{nincs } z \text{ -ből induló elvágó él.} \tag{2.1}$$

TÉTEL 2.1.1 (Mader) *Legyen $G = (V + z, E)$ összefüggő irányítatlan gráf, amelyben $d(z) \neq 3$ és (2.1) teljesül. Ekkor létezik leemelhető élpár.*

Valójában a tételnek a következő változatát fogjuk bizonyítani.

TÉTEL 2.1.2 (Mader) *Legyen $G = (V + z, E)$ összefüggő irányítatlan gráf, amelyben $d(z)$ páros és (2.1) teljesül. Ekkor a z-ből kiinduló élek $d(z)/2$ párba állíthatók úgy, hogy e párokat egymás után leemelve a lokális élösszefüggőségek nem csökkennek.*

Először is belátjuk, hogy a két alak ekvivalens. Tegyük fel először, hogy az 2.1.1 tétel igaz, és tekintsünk egy leemelhető élpárt. Ennek leemelésekor (2.1) fennmarad, hiszen (2.1) miatt a z bármely két szomszédja közötti lokális élösszefüggőség G-ben legalább 2, így a leemelés után is, vagyis a leemeléssel nem keletkezhet z-nél elvágó él. Így a 2.1.1 tételt egymás után alkalmazva mindig találhatunk z-nél leemelhető párokat, összesen $d(z)/2$-t, melyek szimultán leemelésével a lokális élösszefüggőség megőrződik, vagyis a 2.1.2 tétel következik.

Megfordítva, tegyük fel, hogy a 2.1.2 tétel igaz, és igazoljuk a 2.1.1 tételt. Amennyiben $d(z)$ páros, nincs mit bizonyítani. Ha $d(z)$ páratlan, akkor a feltevés szerint legalább 5. Adjunk a gráfhoz egy új x pontot és kössük z-hez 3 párhuzamos éllel. A (2.1) feltétel fennáll a keletkező G' gráfra és így a 2.1.2 tétel alkalmazható G'-re. A tétel által biztosított $(d(z) + 3)/2$ leemelhető pár közül legfeljebb három használ új élt, így $d'(z) \geq 5$ miatt az egyik pár eredeti élekből áll, és ez a pár természetesen az eredeti G-ben is leemelhető. •

A 2.1.2 tétel bizonyítása. Feltesszük, hogy a tétel érvényes minden G-nél kisebb gráfra. Elég azt igazolni, hogy van leemelhető pár, ugyanis ezen állítás ismételt alkalmazásával megkapjuk a 2.1.2 tételt.

Szükségünk lesz a következő R_λ halmaz-függvényre. Legyen $R_\lambda(V) := R_\lambda(\emptyset) = 0$ és $\emptyset \subset X \subset V$-re

$$R_\lambda(X) := \max\{\lambda(u, v) : u \in X, v \in V - X\}. \tag{2.2}$$

A továbbiakban R_λ-t R-rel rövidítjük. Rögtön látszik, hogy $d(X) \geq R(X)$ minden $X \subseteq V$ részhalmazra fennáll.

Lemma 2.1.3 *Egy élpár akkor és csak akkor leemelhető, ha a leemelésével keletkező G' gráfra $d'(X) \geq R(X)$ fennáll minden $X \subseteq V$-re.*

Biz. Ha az élpár leemelhető, akkor $d'(X) \geq R(X)$ következik az R definíciójából. Fordítva, ha az élpár leemelése csökkenti valamely u, v pár lokális élösszefüggőségét, akkor létezik olyan X halmaz, amelyre $|X \cap \{u, v\}| = 1$ és $d'(X) < \lambda(u, v; G)$. Esetleges komplementálással feltehető, hogy $X \subseteq V$. Most $d'(X) < \lambda(u, v; G) \leq R(X)$, és a lemma következik. •

Nevezzünk egy $X \subseteq V$ halmazt **pontos**nak, ha $d(X) = R(X)$, **majdnem-pontos**nak, ha $d(X) = R(X)+1$, és **veszélyes**nek, ha pontos vagy majdnem-pontos, azaz ha $R(X) \leq d(X) \leq R(X) + 1$. Jegyezzük meg, hogy $d(V) = d(z) \geq 2$ miatt a V halmaz sohasem veszélyes. Mivel egy leemelés egy halmaz fokát 2-vel tudja csökkenteni, egy $\{e = zt, f = zu\}$ élpár akkor és csak akkor emelhető le, ha nincsen u és t pontokat egyszerre tartalmazó veszélyes halmaz.

Egy X halmaz többletét jelölje $s(X) := d(X) - R(X)$. Láttuk, hogy a többlet nemnegatív. X akkor pontos, ha $s(X) = 0$ és akkor veszélyes, ha $s(X) \leq 1$.

Lemma 2.1.4 *Az R függvény* **ferdén szupermoduláris***, azaz $X, Y \subseteq V$ esetén a következő egyenlőtlenségek közül legalább az egyik fennáll.*

$$R(X) + R(Y) \leq R(X \cap Y) + R(X \cup Y), \tag{2.3}$$

$$R(X) + R(Y) \leq R(X - Y) + R(Y - X). \tag{2.4}$$

Biz. Figyeljük meg, hogy ha Y-t $V - Y$-nal helyettesítjük, akkor (2.3) és (2.4) egymásba transzformálódik. Legyen (z, z') egy olyan pontpár, amely maximalizálja a $\lambda(z, z')$ értéket az összes olyan párok közül, melyeket legalább az X és Y egyike szétválaszt. Szimmetria miatt feltehetjük, hogy $z \in X$ és $z' \in V - X$. Az Y-t esetleg $V - Y$-nal felcserélve feltehetjük, hogy $z \notin Y$.

Ha $z' \in Y$, akkor $\lambda(z, z') = R(X) = R(Y) = R(X - Y) = R(Y - X)$ és így (2.4) fennáll (valójában egyenlőséggel). Ha $z' \notin Y$, akkor $\lambda(z, z') = R(X) = R(X \cup Y) = R(X - Y)$. Világos, hogy $R(Y) \leq R(X \cap Y)$ vagy $R(Y) \leq R(Y - X)$. Ennek megfelelően (2.3) vagy (2.4) fennáll. •

A d_G-re vonatkozó ismert azonosságok alapján, a 2.1.4 lemmából kapjuk:

Lemma 2.1.5 *Minden $X, Y \subseteq V$-re a következő egyenlőtlenségek közül legalább az egyik teljesül.*

$$s(X) + s(Y) \geq s(X \cap Y) + s(X \cup Y) + 2d_G(X, Y). \tag{2.5}$$

$$s(X) + s(Y) \geq s(X - Y) + s(Y - X) + 2\bar{d}_G(X, Y). \tag{2.6}$$

Lemma 2.1.6 *Legyen T pontos halmaz ($\emptyset \subset T \subset V$) és legyen $e = zu, f = zv$ két él. Jelölje a T összehúzásával keletkező gráfot G' és legyen e' illetve f' az e és f-nek megfelelő két él G'-ben. Ha $\{e', f'\}$ leemelhető G'-ben, akkor $\{e, f\}$ is leemelhető G-ben.*

Biz. Legyen Z olyan halmaz, amelyre $Z \subseteq V - T$ vagy $T \subseteq Z \subseteq V$ és jelölje Z' a G' azon ponthalmazát, amely Z-ből keletkezett a T összehúzásakor. Ekkor $R'(Z') \geq R(Z)$ és $d_{G'}(Z') = d_G(Z)$. Ezért, ha Z veszélyes G-ben, akkor Z' veszélyes G'-ben.

Ha $\{e, f\}$ nem volna leemelhető G-ben, akkor létezne G-nek u és v pontokat tartalmazó X veszélyes halmaza. Most $Z := X \cup T$ nem lehet G-ben veszélyes, mert akkor Z' veszélyes volna G'-ben, és ekkor $\{e', f'\}$ nem volna leemelhető G'-ben. Azt kaptuk tehát, hogy $s(X \cup T) \geq 2$. Alkalmazzuk az előző lemmát X-re és T-re. Most a (2.5) alternatíva nem állhat fenn, mert akkor $0 + 1 \geq s(T) + s(X) \geq s(X \cap T) + s(X \cup T) \geq 0 + 2$ volna. Ezért (2.6)-nak kell fennállnia, azaz $0 + 1 \geq s(T) + s(X) \geq s(X - T) + s(T - X) + 2\bar{d}(X, T) \geq 0 + 0 + 2\bar{d}(X, T)$. Innen $2\bar{d}(X, T) = 0$ és $s(D) \leq 1$ következik, ahol $D := X - T$. Az egyenlőségből következik, hogy $u, v \in D$, míg az egyenlőtlenség azt jelenti, hogy D veszélyes G-ben. De akkor D' veszélyes G'-ben, mutatva, hogy $\{e', f'\}$ nem emelhető le G'-ben, ellentmondásban a lemma feltevésével. •

Tegyük fel indirekt, hogy a tétel nem igaz G-re. Mivel feltettük, hogy a tétel igaz minden G-nél kisebb gráfra, a 2.1.6 lemma alapján minden pontos halmaz egyelemű.

Lemma 2.1.7 *Ha minden pontos halmaz egyelemű, akkor $\lambda(x, y) = \min\{d(x), d(y)\}$ minden $x, y \in V$-re.*

Biz. A lemma rögtön adódik, ha megfigyeljük, hogy egy $X \subset V$ halmaz pontos, amennyiben $\lambda(x, y) = d(X)$ és X elválasztja x-et és y-t. •

Jelöljük S-sel a z szomszédainak a halmazát, és legyen $t \in S$ egy olyan pont, amelynek foka minimális.

Lemma 2.1.8 *$R(X - t) \geq R(X)$ fennáll minden olyan $X \subset V$ halmazra, amelyre $t \in X$ és $|S \cap X| \geq 2$.*

Biz. Legyen $u \in S \cap (X - t)$. A t választása miatt $d(u) \geq d(t)$. $R(X)$ definíciója miatt létezik $v \in X$ és $v' \in V - X$, amelyekre $R(X) = \lambda(v, v')$. Ha $v \neq t$, akkor $R(X - t) \geq \lambda(v, v') = R(X)$. Ha $v = t$, akkor a 2.1.7 Lemma miatt $R(X) = \lambda(t, v') = \min\{d(t), d(v')\} \leq \min\{d(u), d(v')\} = \lambda(u, v') \leq R(X - t)$. •

Lemma 2.1.9 *Ha X veszélyes, akkor $d(z, X) \leq d(z, V - X)$.*

Biz. Legyen $\alpha := d(z, X)$ és $\beta := d(z, V - X)$. Ekkor $R(V - X) = R(X) \geq d(X) - 1 = d(V - X) - \beta + \alpha - 1 \geq R(V - X) - \beta + \alpha - 1$, amiből $\alpha \leq \beta + 1$. Készen vagyunk, ha $\alpha \leq \beta$. $\alpha = \beta + 1$ viszont nem fordulhat elő, mert akkor $d(z) = 2\beta + 1$ volna, ellentmondásban a feltevéssel, hogy $d(z)$ páros. •

Miután G ellenpélda, semmilyen $\{zt, zu\}$ élpár nem emelhető le, és ezért z minden szomszédja benne van t-t tartalmazó veszélyes halmazban. Legyen $\mathcal{L}$ a t pontot tartalmazó veszélyes halmazoknak olyan családja, amely fedi S-et és a lehető legkevesebb tagja van.

Lemma 2.1.10 $|\mathcal{L}| \geq 3$.

Biz. Az előző lemmából tudjuk, hogy $|\mathcal{L}| \geq 2$. Tegyük fel indirekt, hogy $|\mathcal{L}| = 2$ és legyen $\mathcal{L} = \{X, Y\}$. Ekkor tehát $S \subseteq X \cup Y$, és ismét az előző lemmát használva kapjuk, hogy $d(z, X) \leq d(z, V - X) < d(z, Y) \leq d(z, V - Y) < d(z, X)$, ellentmondás. (Az utolsó egyenlőtlenség azért igaz, mert $(S - X) \cup \{t\} \subseteq Y$). •

Legyen X_1, X_2, X_3 az $\mathcal{L}$ három tagja és legyen $\mathcal{F} := \{X_1, X_2, X_3\}$. Az $\mathcal{L}$ minimális választása folytán mindhárom X_i tartalmaz egy olyan $s_i \in S$ elemet, amely a másik kettőben nincs benne.

Lemma 2.1.11 *$\mathcal{F}$ bármely két X, Y tagjára (2.6) teljesül.*

Biz. Tegyük fel először, hogy (2.5) fennáll. Az $\mathcal{L}$ minimalitása miatt $s(X \cup Y) \geq 2$, ezért $1 + 1 \geq s(X) + s(Y) \geq s(X \cap Y) + s(X \cup Y) \geq 0 + 2$, amiből $s(X \cap Y) = 0$ következik, vagyis az, hogy $X \cap Y$ pontos. Mivel minden pontos halmaz egyelemű, így $X \cap Y = \{t\}$. Ekkor $X - Y = X - \{t\}$ és $Y - X = Y - \{t\}$, és így a 2.1.8 lemma alapján $R(X) \leq R(X - Y)$ és $R(Y) \leq R(Y - X)$. Ezért érvényes, $R(X) + R(Y) \leq R(X - Y) + R(Y - X)$, amiből $s(X) + s(Y) \geq s(X - Y) + s(Y - X) + 2\bar{d}(X, Y)$, vagyis ilyenkor (2.6) is fennáll. Abban az esetben, amikor (2.5) nem áll fenn, (2.6) a 2.1.5 lemmából következik. •

Lemma 2.1.12 *$\mathcal{F}$ bármely két X, Y tagjára $|X - Y| = |Y - X| = 1$ és $\bar{d}(X, Y) = 1$.*

Biz. Az előző lemma szerint $1 + 1 \geq s(X) + s(Y) \geq s(X - Y) + s(Y - X) + 2\bar{d}(X, Y) \geq 0 + 0 + 2$. Innen következik, hogy $\bar{d}(X, Y) = 1$ és hogy $X - Y$ és $Y - X$ is pontos, és ezért egypontú. •

Befejezésül, legyen $M := X_1 \cap X_2 \cap X_3$. A 2.1.12 lemmából és $\mathcal{L}$ minimalitásából következik, hogy $X_i = M + s_i$ $(i = 1, 2, 3)$, és hogy $\bar{d}(X_i, X_j) = 1$ $(1 \leq i < j \leq 3)$. Ez viszont azt jelenti, hogy a zt él az egyetlen M-ből kilépő él, vagyis zt elvágó él, ellentmondásban a tétel feltevésével. • •

2.2 A lokális élösszefüggés növelése

A Gráfelmélet jegyzetben láttuk, hogy Lovász leemelési tétele miként használható az élösszefüggőség növelésére. Nem meglepő hogy Mader lokális élösszefüggőséget megőrző leemelési tételét is fel lehet használni a lokális élösszefüggőség optimális növelésére. Ennek részleteit dolgozzuk ki az alábbiakban.

Legyen $G = (V, E)$ irányítatlan gráf. $r(x, y)$ $(x, y \in V)$ nemnegatív egészértékű függvény, amely szimmetrikus, azaz $r(x, y) = r(y, x)$. Adott továbbá egy $m : V \to Z_+$ függvény, amelyre $\widetilde{m}(V)$ páros. Feltesszük, hogy

$$G\text{-nek nincsen olyan } C \text{ komponense, amelyre } \widetilde{m}(C) = 1. \tag{2.7}$$

TÉTEL 2.2.1 *Akkor és csak akkor létezik olyan $H = (V, F)$ gráf, amelyre*

$$d_H(v) = m(v) \tag{2.8}$$

minden $v \in V$-re fennáll és

$$\lambda(x, y; G^+) \geq r(x, y) \tag{2.9}$$

teljesül minden x, y pontpárra, ahol $G^+ = G + H = (V, E \cup F)$, ha

$$\widetilde{m}(X) \geq R_r(X) - d_G(X) \tag{2.10}$$

érvényes minden $X \subseteq V$ részhalmazra, ahol $R_r(X) := \max\{r(x, y) : x \in X, y \in V - X\}$.

Biz. Amennyiben létezik (2.9)-t kielégítő G_+ gráf, úgy $d_G(X)+d_H(X)=d_{G^+}(X)\geq R_r(X)$, amiből $\widetilde{m}(X)\geq d_H(X)\geq R_r(X)-d_G(X)$, azaz (2.10) fennáll.

Az elegendőség bizonyításához adjunk egy új z pontot a gráfhoz és minden régi v pontra $m(v)$ párhuzamos élt z és v között. A keletkező G' gráfban (2.10) miatt $\lambda(x,y;G')\geq r(x,y)$ minden $x,y\in V$ pontpárra fennáll. Alkalmazhatjuk Mader tételét (2.1.2 tétel). A leemelt élek H gráfja kielégíti a kívánalmakat. •

Azt mondjuk, hogy a G gráf valamely C komponense **marginális** (r-re nézve), ha $R_r(C)\leq 1$.

TÉTEL 2.2.2 *Tegyük fel G-nek nincs marginális komponense. Akkor és csak akkor létezik olyan legfeljebb γ élű $H=(V,F)$ gráf, amelyre $\lambda(x,y;G^+)\geq r(x,y)$ teljesül minden x,y pontpárra, ahol $G^+=G+H=(V,E\cup F)$, ha*

$$\sum[R_r(X_i)-d_G(X_i)]\leq 2\gamma \tag{2.11}$$

teljesül V minden $\{X_1,\dots,X_t\}$ rész-partíciójára.

Biz. Jelöljük az X halmaz hiányát $q(X):=R_r(X)-d_G(X)$-szel. Korábban láttuk, hogy minden $X,Y\subset V$-re q kielégíti az alábbiak egyikét:

$$q(X)+q(Y)\leq q(X\cap Y)+q(X\cup Y), \tag{2.12}$$

$$q(X)+q(Y)\leq q(X-Y)+q(Y-X). \tag{2.13}$$

Legyen most $m:V\rightarrow Z_+$ olyan, hogy teljesül rá (2.10), és tegyük fel, hogy m minimális abban az értelemben, hogy bármely ponton eggyel csökkentve az értékét, (2.10) már megsérül. Ekkor minden v pont, amelyre $m(v)>0$, benne van pontos halmazban, ahol egy X halmaz akkor **pontos**, ha $\widetilde{m}(X)=q(X)$.

Legyen $\mathcal{F}$ pontos halmazoknak egy olyan rendszere, amely fedi az összes v pontot, amelyre $m(v)>0$, $|\mathcal{F}|$ minimális és ezen belül $\sum[|Z|:Z\in\mathcal{F}]$ minimális. Állítjuk, hogy $\mathcal{F}$ rész-partíció. Tegyük indirekt fel, hogy X,Y két átmetsző tagja $\mathcal{F}$-nek. Amennyiben (2.12) teljesül, akkor $X\cup Y$ is pontos ellentétben $|\mathcal{F}|$ minimalitásával. Amennyiben (2.13) teljesül, úgy $\widetilde{m}(X)+\widetilde{m}(Y)=q(X)+q(Y)\leq q(X-Y)+q(Y-X)\leq \widetilde{m}(X-Y)+\widetilde{m}(Y-X)=\widetilde{m}(X)+\widetilde{m}(Y)-2\widetilde{m}(X\cap Y)$, amiből $X-Y$, $Y-X$ pontosak és $\widetilde{m}(X\cap Y)=0$. Vagyis $\mathcal{F}$-ben helyettesíthetjük X,Y-t az $X-Y,Y-X$ halmazokkal, ellentétben $\sum[|Z|:Z\in\mathcal{F}]$ minimalitásával.

Legyen $\mathcal{F}=\{X_1,\dots,X_t\}$. Most $m(V)=\sum\widetilde{m}(X_i)=\sum[R_r(X_i)-d_G(X_i)]\leq 2\gamma$, azaz $\widetilde{m}(V)\leq 2\gamma$. Az m-t valamely v ponton (ahol $m(v)\geq 1$) megnövelve feltehetjük, hogy $\widetilde{m}(V)=2\gamma$. Mivel G-nek nincs marginális komponense, teljesül (2.7), ezért a 2.2.1 tétel alapján készen vagyunk. •

2013. május 14.file: lemel2

3. Fejezet

FEDÉS ÉS PAKOLÁS FENYŐKKEL

Egy irányított fát akkor neveztünk **fenyő**nek, ha a gyökérpontja kivételével minden más pontjába pontosan egy él lép be, azaz a gyökérpontjából minden más pontjába el lehet jutni irányított úton. Egy irányított erdőt akkor neveztünk **fenyves**nek, ha minden pont befoka legfeljebb egy, azaz ha az erdő minden komponense fenyő. A 0 befokú pontok halmazát a fenyves **gyökér-halmazá**nak nevezzük. Egy $D = (V, A)$ irányított gráf **feszítő fenyvesé**n olyan fenyvest értünk, amelynek ponthalmaza V, míg élhalmaza az A-nak része.

A gráfelmélet előadásban már megismerkedtünk Edmonds diszjunkt fenyő tételének gyenge alakjával, amely szerint egy irányított gráfban pontosan akkor létezik k élidegen s-gyökerű feszítő fenyő, ha gyökeresen k-élösszefüggő, azaz ha s-ből minden más csúcsba vezet k élidegen út, vagy ami ezzel Menger tétele alapján ekvivalens:

$$\varrho(X) \geq k \text{ minden nemüres } X \subseteq V - s \text{ halmazra.} \tag{3.1}$$

Felvetődik a kérdés, hogy ha már adva van k darab s gyökerű részfenyő, mikor lehet ezeket élidegen módon feszítő fenyőkké kiegészíteni. Ezt válaszolja meg az Edmonds tétel erős alakja. Szükségünk lesz két egyszerű lemmára. Legyen $H := (V, \mathcal{A})$ hipergráf, (ahol $\mathcal{A}$ a V nemüres, nem feltételenül különböző részhalmazainak egy rendszere). Tetszőleges $X \subseteq V$ részhalmazra jelölje $p_H(X)$ az X-től diszjunkt hiperélek számát.

Lemma 3.0.3 *A p_H függvény szupermoduláris, sőt minden $X, Y \subseteq V$ részhalmazra fennáll az alábbi azonosság*

$$p_H(X) + p_H(Y) = p_H(X \cup Y) + p_H(X \cap Y) - d_H(X, Y), \tag{3.2}$$

ahol $d_H(X, Y)$ jelöli azon hiperélek számát, amelyek tartalmaznak pontot mind $X - Y$-ból, mind $Y - X$-ből, de diszjunktak $X \cap Y$-tól. •

Legyen $\mathcal{L}$ a V részhalmazainak olyan rendszere, amelyre $X, Y \in \mathcal{L}, X \cap Y \neq \emptyset$-ből következik, hogy $X \cap Y, X \cup Y \in \mathcal{L}$. Legyen továbbá p az $\mathcal{L}$-n értelmezett tetszőleges metsző szupermoduláris függvény (azaz, ha $X, Y \in \mathcal{L}$ és $X \cap Y \neq \emptyset$, akkor érvényes a szupermodularitási egyenlőtlenség). Tegyük fel, hogy a D' digráf ϱ' befok függvényére $\varrho'(X) \geq p(X)$ teljesül minden $X \in \mathcal{L}$ halmazra. Nevezzük X-et **pontos**nak, ha $\varrho'(X) = p(X)$.

Lemma 3.0.4 *Egymást metsző pontos $X, Y \in \mathcal{L}$ halmazok metszete és uniója is pontos, továbbá $d'(X, Y) = 0$. A maximális pontos halmazok páronként diszjunktak.*

Biz. A második rész nyilván következik az elsőből. Felhasználva ϱ' szubmodularitását azt kapjuk, hogy $p(X) + p(Y) = \varrho'(X) + \varrho'(Y) = \varrho'(X \cup Y) + \varrho'(X \cap Y) + d'(X, Y) \geq p(X \cap Y) + p(X \cup Y)$, amiből a lemma következik. •

3.1 Fenyők és fenyvesek

3.1.1 Adott gyökerű fenyők pakolása

Edmonds valójában azt az általánosabb kérdést vizsgálta, hogy mikor lehet k darab előre adott élidegen s-gyökerű részfenyőt élidegen feszítő fenyővé kiegészíteni.

TÉTEL 3.1.1 (J. Edmonds: erős alak) *A $D = (V, A)$ irányított gráfnak legyen s kijelölt gyökérpontja. Adott $F_1, \dots, F_k$ élidegen s-gyökerű D-beli fenyőt (melyek élhalmaza lehet üres, de mindegyikük ponthalmaza tzartalmazza s-et) akkor és csak akkor lehet D-ben k páronként élidegen s-gyökerű feszítő fenyővé kiegészíteni, ha*

$$\varrho'(X) \geq p(X) \text{ teljesül minden } \emptyset \neq X \subseteq V - s \text{ halmazra,} \tag{3.3}$$

ahol $\varrho'(X)$ jelöli az X-be lépő, az F_i-k által nem használt élek számát, míg $p(X)$ jelöli azon F_i fenyők számát, amelyekre $V(F_i) \cap X = \emptyset$.

Biz. (Lovász) A feltétel nyilvánvalóan szükséges, így csak az elegendőséggel foglalkozunk. Legyen $H := (V, \{V(F_i) : i = 1, \dots, k\})$ az a hipergráf, amelynek a hiperélei az F_i fenyők ponthalmazai. Egy $X \subseteq V - s$ nemüres halmazt nevezzünk **pontos**nak, ha $\varrho'(X) = p(X)$. Nincs mit bizonyítanunk, ha az F_i fenyők mindegyike már maga is feszítő fenyő. Tegyük fel, hogy nem ez a helyzet, és tekintsük az egyik fenyőt, mondjuk F_1-et, amelyik nem feszítő. Jelölje az F_1 fenyő ponthalmazát V_1.

Elegendő azt kimutatni, hogy létezik olyan e felhasználható él, amely kilép V_1-ből és amelyet F_1-hez véve (3.3) továbbra is fennáll, ekkor ugyanis indukcióval a tétel következik. Valamely V_1-ből kilépő e élnek az F_1-hez történő hozzávétele pontosan akkor rontja el a (3.3) feltételt, ha létezik egy olyan pontos X halmaz, amelyikbe e belép és X metszi V_1-et. Ekkor ugyanis az e-nek F_1-be vételével eggyel csökken a még X-be belépő felhasználható élek száma, ugyanakkor az X-től diszjunkt ponthalmazú fenyők száma változatlan marad, vagyis az eredetileg pontos X halmaz az F_1 növelése után már megsértené a feltételt.

Nevezzünk egy X halmazt **veszélyes**nek, ha pontos és metszi mind $V - V_1$-et, mind V_1-et. Ha nincs veszélyes halmaz, akkor bármely V_1-ből kilépő él (van ilyen!) F_1-hez vehető a (3.3) feltétel elrontása nélkül. Tegyük fel tehát, hogy vannak veszélyes halmazok, és legyen M egy tartalmazásra nézve minimális veszélyes halmaz.

Állítjuk, hogy létezik $e = uv$ felhasználható él, amelyre $u \in M \cap V_1, v \in M - V_1$. Valóban, ha nem létezne ilyen él, akkor $p(M - V_1) > p(M) = \varrho'(M) \geq \varrho'(M - V_1)$, azaz ilyenkor $M - V_1$ megsértené a tétel feltételét.

Állítjuk, hogy e nem lép bele veszélyes halmazba. Valóban, ha indirekt e belépne valamely X veszélyes halmazba, akkor a 3.0.4 és 3.0.3 lemmák szerint $M \cap X$ pontos, továbbá a 3.0.3 lemma második része szerint $d_H(X, Y) = 0$, azaz X (amely a veszélyessége miatt metszi V_1-et) szükségképpen metszi $M \cap V_1$-et is. Azt kapjuk tehát, hogy $M \cap X$ is veszélyes, ellentmondásban M minimális választásával. (Az u pont $M - X$-ben van, tehát $M \cap X$ valódi része M-nek.)

Találtunk tehát egy olyan e élt, amellyel az F_1 fenyőt kibővítve a (3.3) feltétel továbbra is érvényben marad. • •

Feladat 3.1 *Hogyan lehet algoritmikusan megkeresni a kívánt fenyőket?* (Szubrutinként használhatjuk a maximális-folyam minimális-vágás megkeresésére vonatkozó algoritmust.)

Mi történik, ha nem részfenyőket akarunk élidegen módon feszítő fenyőkké kiterjeszteni, hanem fenyveseket? A legegyszerűbb, $k = 1$ esetben könnyen adódik a következő tétel.

TÉTEL 3.1.2 *Tegyük fel, hogy a $D = (V, A)$ digráfban van s gyökerű feszítő fenyő és s-be nem lép él. A digráf egy (V, B) fenyvese akkor és csak akkor egészíthető ki s gyökerű feszítő fenyővé, ha nincsen olyan $Z \subseteq V - s$ részhalmaz, amelybe B-beli él nem lép be és minden Z-be lépő uv élre v-be lép B-beli él.*

Biz. A feltétel nyilván szükséges. Az elegendőség igazolásához töröljünk ki minden olyan $A - B$-beli élt, amelynek fejébe lép B-beli él. Ha a keletkező D' digráfban van feszítő s-fenyő, úgy az automatikusan magában foglalja B-t. Ha nincs ilyen fenyő, akkor létezik egy D'-ben 0 befokú nemüres $Z \subseteq V - s$ halmaz. Ebbe D-ben csak olyan $A - B$-beli élek lépnek, melyek fejébe lép B-beli él. •

Egyetlen fenyves kiegészítése fenyővé tehát könnyű feladat. Ha viszont egy helyett kettőt akarunk élidegen módon egy-egy s gyökerű feszítő fenyővé kiegészíteni, akkor a probléma NP-teljessé válik már abban az igen egyszerűen hangzó esetben is, amikor az egyik fenyvesnek egyáltalán nincs éle, és a másiknak is csak kettő. Ennek segítségével ugyanis meg lehet oldani az irányított gráfra vonatkozó két élidegen út problémáját, amiről bebizonyították, hogy NP-teljes, és ami abból áll, hogy egy digráfban s_i-ből t_i-be keresünk egy-egy élidegen utat ($i = 1, 2$). A visszavezetés érdekében adjunk a digráfhoz egy új s pontot, egy új t pontot, s-ből s_i-be egy élt, t_i-ből t-be egy élt ($i = 1, 2$), végül t-ből minden pontba két párhuzamos élt. Álljon F_1 az ss_1, t_1t élekből, míg F_2-nek nincs éle és egyetlen pontja s. Könnyen ellenőrizhető, hogy a kibővített digráfban akkor és csak akkor van két olyan élidegen s-gyökerű feszítő fenyő, melyek egyike tartalmazza F_1-et, másika pedig F_2-t, ha az eredeti digráfban létezik egy-egy élidegen út s_1-ből t_1-be illetve s_2-ből t_2-be. Vagyis ha a fenyves kiegészítési problémát meg tudnánk polinom időben oldani, akkor a két élidegen út NP-teljes problémáját is.

TÉTEL 3.1.3 *Legyen $D = (V, A)$ digráf gyökeresen k-élösszefüggő az s gyökérpontra nézve. Legyen $\gamma \geq k$ egész és $f : (V - s) \to \mathbf{Z}_+$ egy függvény úgy, hogy a*

$$\text{párhuzamos } sv \text{ élek száma legalább } f(v). \tag{3.4}$$

D-ből akkor és csak akkor lehet kihagyni sv éleket úgy, hogy a keletkező $\hat{D}$ digráf továbbra is gyökeresen k-élösszefüggő, teljesíti (3.4)-t és az s kifoka legfeljebb γ, ha

$$\widetilde{f}(V - s) \leq \gamma \tag{3.5}$$

és

$$\widetilde{f}(X_0) + kt - \sum_{i=1}^{t} \varrho_{D-s}(X_i) \leq \gamma \tag{3.6}$$

fennáll $V - s$ minden olyan $\{X_0, X_1, \ldots, X_t\}$ partíciójára, amelyben $t \geq 1$ és csak X_0 lehet üres.

Biz. Tegyük fel, hogy létezik a kívánt $\hat{D}$ részgráf és legyen $\{X_0, X_1, \ldots, X_t\}$ a $V - s$ egy partíciója. A (3.4) feltétel miatt legalább $\widetilde{f}(V - s)$ s-tövű él lép $V - s$-be, ezért (3.5) szükséges. Továbbá legalább $\widetilde{f}(X_0)$ s-tövű él lép be X_0-ba. Mivel X_i $(i \geq 1)$ befoka $\hat{D}$-ben is legalább k, ezért legalább $k - \varrho_{(D-s)}(X_i)$ darab s-tövű élnek be kell belépnie X_i-be. Emiatt $\hat{D}$-ben az s kifoka legalább $\widetilde{f}(X_0) + \sum_{i=1}^{t}[k - \varrho_{D-s}(X_i)]$ másrészt legfeljebb γ, vagyis (3.6) szükséges.

Az elegendőséghez tetszőleges sorrendben töröljünk ki s-tövű éleket csak arra vigyázva, hogy megőrizzük a gyökeres k-élösszefüggőséget és (3.4)-t.

Állítás 3.1.1 *Az így kapott $\hat{D}$ digráfban s kifoka legfeljebb γ.*

Biz. $\hat{D}$ minimalitása miatt minden sv él vagy belép pontos (azaz k-befokú) halmazba vagy pedig az sv élnek pontosan $f(v)$ párhuzamos példánya van $\hat{D}$-ban. Amennyiben mindegyik sv élnek pontosan $f(v)$ párhuzamos példánya van $\hat{D}$-ban, úgy $\delta_{\hat{D}}(s) = \widetilde{f}(V - s) \leq \gamma$ a (3.5) feltétel miatt. Tegyük most fel, van sv él, amelynek több, mint $f(v)$ példánya van $\hat{D}$-ban, vagyis ez az él belép pontos halmazba. A befok függvény szubmodularitása folytán két metsző pontos halmaz uniója is pontos, ezért a maximális pontos halmazok a $V - s$ egy $\{X_1, \ldots, X_t\}$ részpartícióját alkotják. Legyen $X_0 := (V - s) - \cup_{i=1}^{t} X_i$. Ekkor $\delta_{\hat{D}}(s) = \widetilde{f}(X_0) + \sum_{i=1}^{t}[k - \varrho_{D-s}(X_i)]$ és a jobboldal (3.6) miatt legfeljebb γ. •

Feladatok

3.2 *Igazoljuk, hogy ha egy digráfban bármely élt elhagyva a $\lambda(s, v)$ értéke csökken valamely v csúcsra, akkor minden v csúcsra $\lambda(s, v) = \varrho(v)$.*

3.3 *Legyen c olyan nem-negatív valós súlyozás a D digráf élhalmazán, amelyre $\varrho_c(X) \geq 1$ teljesül minden $\emptyset \neq X \subseteq V - s$ halmazra. Nevezzünk egy X halmazt pontosnak vagy szorosnak, ha itt egyenlőség teljesül. Igazoljuk, hogy létezik olyan s-gyökerű feszítő fenyő, amely minden szoros halmazba pontosan egyszer lép be.*

3.4 *Igazoljuk az Edmonds tétel alábbi kiterjesztését. Legyen $D = (V, E)$ irányított gráf. Legyen $\mathcal{F}$ a $V - s$ részhalmazainak olyan rendszere, amelyre $X, Y \in \mathcal{F}$, $X \cap Y \neq \emptyset$-ből következik, hogy $X \cup Y, X \cap Y \in \mathcal{F}$. Amennyiben minden $X \in \mathcal{F}$ halmaz befoka legalább k, akkor E felbontható k részre úgy, hogy minden $X \in \mathcal{F}$-re mind a k rész tartalmaz X-be lépő élt.*

3.5 *Mutassuk meg, hogy az alábbi állítás ekvivalens Edmonds erős tételével. A $D = (V, A)$ irányított gráfban legyen $R_1, \ldots, R_k$ a pontoknak k (nem feltétlenül diszjunkt, vagy különböző) nemüres részhalmaza. Akkor és csak akkor létezik D-nek k élidegen feszítő fenyvese, melyek gyökér-halmaza rendre $R_1, \ldots, R_k$, ha bármely $\emptyset \neq Z \subset V$ részhalmazra a $\varrho(Z)$ befok legalább azon R_i halmazok száma, melyek diszjunktak Z-től.*

i

3.1.2 Szabad gyökerű fenyők pakolása

Mi a helyzet, ha a fenyők gyökerei nincsenek előre rögzítve, azaz mikor létezik a digráfban k élidegen feszítő fenyő? Rögtön egy általánosabb kérdést válaszolunk meg.

TÉTEL 3.1.4 *Legyenek adottak $f : V^* \to \mathbf{Z}_+$ alsó és $g : V^* \to \mathbf{Z}_+ \cup \{\infty\}$ felső korlátok, melyekre $f \leq g$. Egy $D^* = (V^*, A^*)$ irányított gráfban akkor és csak akkor létezik k páronként élidegen feszítő fenyő úgy, hogy mindegyik v csúcs közülük legalább $f(v)$-nek és legfeljebb $g(v)$-nek a gyökere, ha*

$$\widetilde{f}(V^*) \leq k, \tag{3.7}$$

$$\sum_{i=1}^{t} \varrho_{D^*}(X_i) \geq k(t-1) + \widetilde{f}(X_0) \tag{3.8}$$

fennáll V^* minden olyan $\{X_0, X_1, \ldots, X_t\}$ partíciójára, amelyben $t \geq 1$ és csak X_0 lehet üres, és

$$\widetilde{g}(X) \geq k - \varrho_{D^*}(X) \text{ minden } X\text{-re}, \emptyset \subset X \subseteq V^*. \tag{3.9}$$

Biz. A szükségesség bizonyításához tegyük fel, hogy van k diszjunkt feszítő fenyő a kívánt módon. Miután $\widetilde{f}(V^*)$ alsó korlát a fenyők számára és k fenyőnk van, (3.7) adódik. Legyen $\{X_0, X_1, \ldots, X_t\}$ egy partíció. A k feszítő fenyő közül $\alpha \geq \widetilde{f}(X_0)$-nak a gyökere van X_0-ban, így ezen α fenyő mind belép az $X_1, \ldots, X_t$ halmazok mindegyikébe, míg a nem X_0-ban gyökerező fenyők legalább $t-1$ halmazba belépnek. Vagyis az $X_1, X_2, \ldots, X_t$ halmazokba belépő élek teljes $\sum_{i=1}^{t} \varrho_D(X_i)$ száma legalább $\alpha t + (k-\alpha)(t-1) = \alpha + k(t-1) \geq \widetilde{f}(X_0) + k(t-1)$, így (3.8) szükségessége következik. Továbbá, a k fenyő közül legfeljebb csak $\varrho(X)$ léphet be egy X halmazba, tehát az X-be nem lépő legalább $k - \varrho(X)$ fenyőnek a gyökere szükségképpen X-ben van. Ilyen fenyő viszont legfeljebb csak $\widetilde{g}(X)$ lehet, így (3.9) következik.

Az elegendőség igazolásához adjunk D^*-hoz egy új s pontot, és vezessünk s-ből minden pontba $\min\{g(v), k\}$ párhuzamos élt. Az így nyert D digráf (3.9) miatt gyökeresen k-élösszefüggő. Figyeljük meg, hogy $\gamma = k$-ra a (3.6) és (3.8) feltételek valamint a (3.5) és (3.7) feltételek ekvivalensek. A 3.1.3 tételt D-re és $\gamma = k$-ra alkalmazva kapjuk, hogy D-nek létezik egy gyökeresen k-élösszefüggő $\hat{D}$ részgráfja, amelyre egyrészt $\varrho_{\hat{D}}(V^*) = k$, másrészt minden sv él legalább $f(v)$ és legfeljebb $g(v)$ párhuzamos példányban szerepel.

Az Edmonds fenyőtétel gyenge alakja szerint $\hat{D}$-ban van k diszjunkt s-gyökerű feszítő fenyő. Ezek mindegyike, $\varrho_{\hat{D}}(V^*) = k$ miatt, pontosan egy s-ből kilépő élt használ, így ezen éleket kihagyva D^*-nak k darab feszítő fenyőjét kapjuk úgy, hogy minden v pont éppen annyinak a gyökere, ahány párhuzamos él van $\hat{D}$-ban s-ből v-be. Ez a szám legalább $f(v)$ és legfeljebb $g(v)$. •

Következmény 3.1.5 *Egy $D = (U, A)$ digráfban akkor és csak akkor létezik k élidegen feszítő fenyő, ha U minden $\{X_1, \ldots, X_t\}$ rész-partíciójára $\sum_{i=1}^{t} \varrho_D(X_i) \geq k(t-1)$.*

Fenyőpakolásokra érvényes az alábbi linking tulajdonság.

Következmény 3.1.6 *A $D = (U, A)$ digráfban akkor és csak akkor létezik k élidegen feszítő fenyő úgy, hogy*

(i) *mindegyik v csúcs legfeljebb $g(v)$-nek gyökere, ha $\sum_{i=1}^{t} \varrho_D(X_i) \geq k(t-1)$ fennáll U minden olyan $\{X_1, \ldots, X_t\}$ rész-partíciójára, és $\widetilde{g}(X) \geq k - \varrho(X)$ minden X-re, $\emptyset \subset X \subset U$,*

(ii) *mindegyik v csúcs ezek közül legalább $f(v)$-nek gyökere, ha $\widetilde{f}(U) \leq k$ és (3.8) teljesül,*

(iii) *mindegyik v csúcs ezek közül legalább $f(v)$-nek és legfeljebb $g(v)$-nek gyökere, ha külön-külön az alsó korlátos és a felső korlátos feladatnak van megoldása.* •

Gyakorlat 3.6 *Mikor létezik k élidegen feszítő fenyő, melyek gyökerei különbözőek?*

Feladat 3.7 *Irányított gráfban keressünk k élidegen feszítő fenyvest, melyek együttes komponens száma a lehető legkisebb! Mutassuk meg, hogy ez ekvivalens azzal, hogy minimális számú új élt adunk a digráfhoz úgy, hogy a kiegészített digráf tartalmaz k élidegen feszítő fenyőt!*

3.1.3 Fedés fenyőkkel

Vizsgáljuk meg, mi a helyzet, ha fenyők pakolása helyett a fenyőkkel fedni szeretnénk az éleket. Egy $D = (V, E)$ digráf pontjainak bármely $X \subseteq V$ részhalmazához jelölje $B(X) := \{v \in X$: létezik olyan $uv \in A$ él, amelyre $u \in V - X\}$ az X halmaz **bejárat**át. Ez tehát azon X-beli pontokból áll, melyekbe vezet X-n kívülről él. A következő eredmény az Edmonds tétel egyfajta fedési ellenpárjának tekinthető.

TÉTEL 3.1.7 (K. Vidyasankar) *Legyen s a $D = (V, A)$ digráf egy kijelölt pontja, amibe nem lép be él. D éleit akkor és csak akkor lehet k darab s-gyökerű feszítő fenyővel lefedni, ha* (i) *minden $v \in V - s$ pontra $\varrho(v) \leq k$, és* (ii) *minden $X \subseteq V - s$ halmazra*

$$k - \varrho(X) \leq \sum [k - \varrho(v) : v \in B(X)], \tag{3.10}$$

ahol $B(X)$ az X bejáratát jelöli.

Biz. Szükségesség. Miután egy fenyő egy v-be menő élt tartalmaz, az (i) feltétel szükségessége nyilvánvaló. Tegyük most fel, hogy létezik k feszítő s-fenyő, melyek fedik A-t. Jelölje $z(e)$ az e élt tartalmazó fenyők száma minusz 1-et. Ekkor $z \geq 0$, továbbá $\varrho_z(X) + \varrho(X) \geq k$ $(X \subseteq V - s)$, és $\varrho_z(v) + \varrho(v) = k$ $(v \in V - s)$. Miután minden X-be lépő él feje $B(X)$-ben van, $\varrho_z(X) \leq \sum[\varrho_z(v) : v \in B(X)]$ és ezeket összevetve kapjuk, hogy $k - \varrho(X) \leq \varrho_z(X) \leq \sum[\varrho_z(v) : v \in B(X)] = \sum[k - \varrho(v) : v \in B(X)]$.

Az elegendőséget elemi konstrukcióval visszavezetjük Edmonds gyenge tételére. Minden $v \in V - s$ pontra adjunk D-hez a v egy kópiáját, amelyet v'-vel jelölünk. Adjunk k párhuzamos élt v-ből v'-be és $k - \varrho(v)$ párhuzamos élt v'-ből v-be (ezen utóbbi szám (i) miatt nem-negatív). Túl ezen, minden $uv \in A$ élre adjunk k párhuzamos élt u-ból v'-be.

Ha a megnövelt D' digráfra létezik k darab D'-beli élidegen feszítő fenyő, úgy ezek az eredeti D-ben k fedő fenyőnek felelnek meg. Edmonds gyenge fenyőpakolási tétele szerint, ha a k élidegen fenyő nem létezik D'-ben, akkor van olyan $X' \subseteq V' - s$ halmaz, amelyre $\varrho'(X') < k$, ahol $\varrho' := \varrho_{D'}$. Legyen $X := \{v \in X'\}$, $Z := \{v \in X', v' \notin X'\}$.

A konstrukció miatt, ha $v' \in X'$, akkor $v \in X'$, és ha uv belép X-be, akkor $v \in Z$ és így $B(X) \subseteq Z$. Ezért $k > \varrho'(X') = \varrho(X) + \sum[k - \varrho(v) : v \in Z] \geq \varrho(X) + \sum[k - \varrho(v) : v \in B(X)]$, ellentmondásban az (ii) feltétellel. •

Kicsit bonyolultabb konstrukcióval levezethető a Vidyasankar tétel alábbi általánosítása is.

Feladat 3.8 *Legyen s a $D = (V, E)$ digráf egy kijelölt s pontja, amibe nem lép be él. Legyenek továbbá $f \leq g'$ nemnegatív egészértékű függvények az élhalmazon. Akkor és csak akkor létezik k s-gyökerű feszítő fenyő úgy, hogy minden a él legalább $f(a)$ és legfeljebb $g'(a)$ fenyőben van, ha $\varrho_f(v) \leq k$ minden $v \in V - s$-re és $k - \varrho_f(X) \leq \sum[k - \varrho_f(v) : v \in Y] + \sum[g'(e) - f(e) : e = uv \in E, v \in B(X) - Y, u \in V - X]$ teljesül, ahol $X \subseteq V - s$ és $Y \subseteq B(X)$.*

3.1.4 Fedés fákkal

A Gráfelmélet c. jegyzetben megmutattuk, hogy az Edmonds-féle fenyő tétel gyenge alakjának segítségével miként igazolható Nash-Williams tétele, amely szerint *egy $G = (V, E)$ irányítatlan gráf élhalmaza akkor és csak akkor fedhető le k erdővel, ha a csúcsok tetszőleges X nemüres részhalmaza legfeljebb $k(|X| - 1)$ élt feszít.* Most hasonló utat követve a fenyő tétel erős alakjából levezetjük a Nash-Williams tétel alábbi általánosítását.

TÉTEL 3.1.8 *A $G = (V, E \cup F)$ irányítatlan gráfban adottak a $T_i = (V_i, F_i)$ fák $(i = 1, \ldots, k,)$, melyekre $\emptyset \neq V_i \subseteq V$, és $\cup_i F_i = F$. Akkor és csak akkor lehet e fákat k darab E-t fedő erdővé kiegészíteni, ha minden nemüres $X \subseteq V$ halmazra*

$$i_E(X) \leq k|X| - \widetilde{m}(X) - p(X), \tag{3.11}$$

ahol $i_E(X)$ az X által feszített E-beli élek számát jelöli, $p(X)$ az X-től diszjunkt V_i halmazok számát, míg $m(v)$ a v-t tartalmazó V_i halmazokét és $\widetilde{m}(X) := \sum[m(v) : v \in X]$.

Biz. Szükségesség. A T_i fához az X által feszített élek közül legfeljebb $|X - V_i|$ élt tudunk hozzávenni (kör létrehozása nélkül), ha $V_i \cap X \neq \emptyset$, és legfeljebb $|X - V_i| - 1$-et, ha $V_i \cap X = \emptyset$. Így ha létezik a szóbanforgó erdőkkel való fedés, akkor X összesen legfeljebb $\sum_i |X - V_i| - p(X) = k|X| - \widetilde{m}(X) - p(X)$ E-beli élt feszíthet X, azaz (3.11) fennáll.

Elegendőség. Legyen $g(v) := k - m(v)$ $(v \in V)$. Ekkor a (3.11) feltétel miatt mindenesetre $i_E(X) \leq k|X| - \widetilde{m}(X) = \widetilde{g}(X)$, így a fokszám-korlátos irányítási tétel miatt E-nek létezik egy $\vec{E}$ irányítása, amelyre $\varrho_{\vec{E}}(v) \leq g(v)$ minden $v \in V$ csúcsra.

Élek esetleges párhuzamos behúzásával feltehetjük, hogy a T_i fák élidegenek. Adjunk a gráfhoz egy új s gyökérpontot. Mindegyik T_i fából válasszunk ki egy tetszőleges s_i pontot, adjunk a gráfhoz egy irányított ss_i élt, majd irányítsuk meg F_i elemeit úgy, hogy ezen ss_i éllel együtt egy s gyökerű fenyőt kapjunk, melynek élhalmazát jelölje $\vec{A}_i$. Legyen $\vec{A} := \cup_i \vec{A}_i$. Ekkor $v \in V$-re $\varrho_{\vec{A}}(v) = m(v)$, így $\varrho_{\vec{E} \cup \vec{A}}(v) \leq k - m(v) + m(v) = k$.

Minden v csúcsra adjunk a digráfhoz további $k - \varrho_{\vec{E} \cup \vec{A}}(v)$ (≥ 0) párhuzamos sv élt. Jelölje $\vec{E}^+$ ezen új élek halmazának valamint $\vec{E}$-nek az unióját. A keletkező $D = (V + s, \vec{A} \cup \vec{E}^+)$ digráfban minden $v \in V$ csúcsba pontosan k él lép be, melyek közül $m(v)$ darab van $\vec{A}$-ban, tehát $\varrho_{\vec{E}^+}(v) = k - m(v)$.

Állítjuk, hogy D-re és az $\vec{A}_i$ fenyőkre teljesül Edmonds erős fenyő tételének feltétele. Valóban, a (3.11) feltétel alapján $\varrho_{\vec{E}^+}(X) = \sum[\varrho_{\vec{E}^+}(v) : v \in X] - i_E(X) = \sum[k - m(v) : v \in X] - i_E(X) = k|X| - \widetilde{m}(X) - i_E(X) \geq p(X)$. Az Edmonds tétel alapján a D digráf felbomlik k élidegen feszítő fenyőre, melyek közül az i-edik magában foglalja $\vec{A}_i$-t, így e fenyők az eredeti G gráf keresett erdő-fedését szolgáltatják. •

Nash-Williams fedési tétele valóban speciális eset: a k darab fa legyen $T_i = (\{v\}, \emptyset)$, ahol v tetszőleges csúcs. Ekkor $v \in X$ esetén $\widetilde{m}(X) + p(X) = k + 0 = k$, míg $v \notin X$ esetén $\widetilde{m}(X) + p(X) = 0 + k = k$, vagyis ilyenkor (3.11) a Nash-Williams féle $i_E(X) \leq k(|X| - 1)$ feltétellel ekvivalens.

Megjegyzendő, hogy a matroidelmélet választ ad arra a még általánosabb kérdésre, hogy k darab adott erdő mikor terjeszthető ki k erdővé, melyek fedik az élhalmazt, de ilyenkor a gráfokra adódó válasz már bonyolultabb, mint a fenti tételben, mert a csúcsoknak minden részpartíciójára kell egy bizonyos egyenlőtlenséget megkövetelni.

Feladat 3.9 *Az Edmonds tétel fenti bizonyítását utánozva adjunk közvetlen bizonyítást a 3.1.8 tételre.*

3.1.5 Lokális élösszefüggés digráfban

A következő eredmény érdekes kapcsolatot mutat be digráfok pontpárjainak lokális élösszefüggősége között.

TÉTEL 3.1.9 (Lovász) *Ha a D digráf egy s pontjára $\delta(s) > \varrho(s)$, akkor létezik olyan $v \in V - s$ pont, amelyre $\lambda(s,v) > \lambda(v,s)$.*

Biz. Tegyük fel indirekt, hogy minden $v \in V - s$ pontra

$$\lambda(s,v) \leq \lambda(v,s). \tag{3.12}$$

Valamely $v \in V - s$ pontra egy $X \subseteq V - s$ halmazt nevezzünk v**-re nézve bepontos**nak, ha $\varrho(X) = \lambda(x,v)$. Láttuk már, hogy az ilyen halmazok uniója (és metszete is) ilyen, így létezik egy v-t tartalmazó egyértelmű maximális $P(v)$ bepontos halmaz.

Lemma 3.1.10 *$u \in P(v)$ esetén $P(u) \subseteq P(v)$.*

Biz. $\lambda(s,u)+\lambda(s,v) = \varrho(P(u))+\varrho(P(v)) \geq \varrho(P(u)\cap P(v))+\varrho(P(u)\cup P(v)) \geq \lambda(s,u)+\lambda(s,v)$, amiből adódik, hogy végig egyenlőség van, és így $P(u) \cup P(v)$ v-re nézve bepontos. $P(v)$ maximalitása miatt $P(u) \subseteq P(v)$. •

Legyenek $P_1,\ldots,P_t$ a $\{P(v) : v \in V - s\}$ halmazrendszer maximális tagjai, és tegyük fel, hogy $P_i = P(v_i)$. Jelölje S_i a P_i azon pontjainak halmazát, melyek nincsenek más P_j-ben, azaz S_i a P_i saját része. A 3.1.10 lemma miatt $v_i \in S_i$, azaz S_i nemüres. Most

$$\delta(S_i) \geq \lambda(v_i,s) \geq \lambda(s,v_i) = \varrho(P_i). \tag{3.13}$$

Miután a P_i halmazok lefedik $V - s$-et a (páronként diszjunkt) S_i halmazokból valamint az s-ből kilépő $\delta(s)+\sum_i \delta(S_i)$ darab él mindegyike belép az s-be vagy a P_i halmazok valamelyikébe, és így $\delta(s)+\sum_i \delta(S_i) \leq \varrho(s)+\sum_i \varrho(P_i)$, amiből (3.13) alapján $\varrho(s)-\delta(s) \geq \sum_i \delta(S_i) - \sum_i \varrho(P_i) \geq 0$ adódik, ellentmondásban a tétel feltevésével. • •

Következmény 3.1.11 *Ha a D digráf egy s pontjára $\delta(s) \geq \varrho(s)$, akkor létezik olyan $v \in V - s$ pont, amelyre $\lambda(s,v) \geq \lambda(v,s)$.*

Biz. Tetszőleges sv élt a digráfhoz adva, a keletkező D' digráfban az előző tétel alapján létezik olyan v pont, amelyre $\lambda'(s,v) > \lambda'(v,s)$, amiből $\lambda(s,v) \geq \lambda'(s,v) - 1 \geq \lambda'(v,s) = \lambda(v,s)$. •

Következmény 3.1.12 *Ha a D digráfban minden $\{u,v\}$ pontpárra $\lambda(u,v) = \lambda(v,v)$, akkor a digráf Euler, azaz minden v csúcsára $\varrho(v) = \delta(v)$.* •

Feladat 3.10 Igazoljuk Lovász 3.1.9 tételének élesítését: *Ha a D digráf egy s pontjára $\delta(s) > \varrho(s)$, akkor létezik olyan $v \in V - s$ pont, amelyre $\lambda(s,v) > \lambda(v,s)$ és $\delta(v) < \varrho(v)$.*

Gyakorlat 3.11 Igaz-e a következő állítás? *Ha egy digráfban létezik k élidegen s-gyökerű feszítő fenyő, és s befoka $l \leq k$, akkor van olyan v pont, amelyből vezet ℓ élidegen út s-be.*

2013. május 14.file: lfpak

3.1.6 Japán fenyvesek

Legyen $D = (V, A)$ irányított gráfban adottak az $R_1, \ldots, R_k$ nemüres gyökérhalmazok. Egy B_i maximális R_i-fenyvesen egy olyan fenyvest értünk, amelyben az R_i elemei a 0-befokú pontok és B_i tartalmazza az összes R_i-ből elérhető pontot.

Jelölés A nemüres $Z, X \subseteq V$ részhalmazokra jelölje $Z \mapsto X$ azt, hogy Z diszjunkt X-től és X elérhető Z-ből (azaz vezet irányított út Z-ből X-be). Jelölje $p(X)$ azon R_i halmazok számát, amelyekre $R_i \mapsto X$.

TÉTEL 3.1.13 (Kamiyama, Katoh, Takizawa) *Akkor és csak akkor léteznek élidegen maximális R_i-fenyvesek, ha $\varrho(X) \geq p(X)$ minden $X \subseteq V$ nemüres részhalmazra.*

Biz. A szükségesség kézenfekvő. Az elegendőséghez nevezzünk egy X halmazt **pontos**nak, ha $\varrho(X) = p(X)$.

Lemma 3.1.14 *Tegyük fel, hogy X és Y átmetsző pontos halmazok és az $X \ominus Y$ szimmetrikus differencia minden pontjából $X \cap Y$ elérhető. Ekkor $X \cap Y$ is pontos és nincsen olyan R_i halmaz, amelyre $R_i \cap X \neq \emptyset$, $R_i \cap Y \neq \emptyset$, $R_i \cap X \cap Y = \emptyset$.*

Biz. Állítjuk, hogy $p(X)+p(Y) \leq p(X\cap Y)+p(X\cup Y)$. Nézzük meg, hogy egy R_i-nek mennyi a hozzájárulása a két oldalhoz. A feltevés szerint $R_i \mapsto X$-ből (vagy $R_i \mapsto Y$-ból) következik, hogy $R_i \mapsto (X \cap Y)$. Emiatt, ha R_i pontosan eggyel járul a baloldalhoz, akkor legalább eggyel a jobbhoz is. Ha viszont R_i kettővel járul a baloldalhoz, azaz $R_i \mapsto X$ és $R_i \mapsto Y$, akkor $R_i \mapsto (X \cap Y)$ és $R_i \mapsto (X \cup Y)$ és így a jobbhoz is kettővel.

Kapjuk, hogy $\varrho(X)+\varrho(Y) = p(X)+p(Y) \leq p(X\cap Y)+p(X\cup Y) \leq \varrho(X\cap Y)+\varrho(X\cup Y) \leq \varrho(X)+\varrho(Y)$, amiből egyrészt $p(X\cap Y) = \varrho(X\cap Y)$ (és $p(X\cup Y) = \varrho(X\cup Y)$) adódik, másrészt $p(X)+p(Y) = p(X\cap Y)+p(X\cup Y)$. Ekkor viszont valóban nem létezhet a lemmában említett R_i, hiszen annak a hozzájárulása a baloldalhoz nulla, a jobboldalhoz egy. •

Lemma 3.1.15 *Tegyük fel, hogy X és Y átmetsző halmazok, melyekre X pontos, $\varrho(Y) = 0$ és $Y - X$ minden pontjából elérhető $X \cap Y$. Ekkor $X \cap Y$ is pontos és nincsen olyan R_i halmaz, amelyre $R_i \cap X \neq \emptyset$, $R_i \cap Y \neq \emptyset$, $R_i \cap X \cap Y = \emptyset$.*

Biz. Állítjuk hogy $p(X) + p(Y) \leq p(X \cap Y) + p(X \cup Y)$. Nyilván $p(Y) = 0$. Nézzük meg, hogy egy R_i-nek mennyi a hozzájárulása a két oldalhoz. A feltevés szerint egyrészt $R_i \not\mapsto Y$, másrészt $R_i \mapsto X$-ből következik, hogy $R_i \mapsto (X \cap Y)$. Emiatt, ha R_i hozzájárul a baloldalhoz, akkor eggyel járul hozzá és ekkor a jobboldalhoz is hozzájárul.

Kapjuk, hogy $\varrho(X)+\varrho(Y) = p(X)+p(Y) \leq p(X\cap Y)+p(X\cup Y) \leq \varrho(X\cap Y)+\varrho(X\cup Y) \leq \varrho(X)+\varrho(Y)$, amiből egyrészt $p(X\cap Y) = \varrho(X\cap Y)$ (és $p(X\cup Y) = \varrho(X\cup Y)$) adódik, másrészt $p(X)+p(Y) = p(X\cap Y)+p(X\cup Y)$. Ekkor viszont valóban nem létezhet a lemmában említett R_i, hiszen annak a hozzájárulása a baloldalhoz nulla, a jobboldalhoz egy. •

Tekintsük az egyik gyökérhalmazt, amelyből megy ki él, mondjuk R_1. Egy X pontos halmazt nevezzünk **kritikus**nak, ha $X - R_1 \neq \emptyset$ és $X \cap R_1 \neq \emptyset$. Indukció miatt elegendő kimutatni, hogy létezik egy olyan R_1-ből kilépő él, amely nem lép be kritikus halmazba.

Lemma 3.1.16 *Legyen $t \in V - R_1$ olyan csúcs, amelybe vezet R_1-ből egy st él és legyen X egy t-t tartalmazó legszűkebb kritikus halmaz.* (a) *Ekkor t elérhető az X minden pontjából.* (b) *Létezik egy uv él $X \cap R_1$-ből $X - R_1$-be.*

Biz. Jelölje Y azon pontok halmazát, amelyekből t elérhető. Persze $s \in Y$, így $Y \cap R_i \neq \emptyset$. A 3.1.15 lemma miatt $X \cap Y$ pontos és nem lehet, hogy $X \cap Y \cap R_i = \emptyset$, vagyis $X \cap Y$ kritikus. Az X minimalitása miatt $X \cap Y = X$, azaz $X \subseteq Y$.

A második részhez tegyük fel indirekt, hogy nincs ilyen uv él. Ekkor az st él miatt $R_1 \mapsto (X - R_1)$ és $R_1 \cap X \neq \emptyset$ miatt persze $R_1 \not\mapsto X$. Továbbá $i \geq 2$-re ha $R_i \mapsto X$, akkor $R_i \mapsto (X - R_1)$, hiszen t elérhető $X \cap R_1$ minden pontjából. Kapjuk, hogy $p(X - R_1) > p(X)$, amiből $p(X - R_1) > p(X) = \varrho(X) \geq \varrho(X - R_1)$, ellentmondásban a tétel feltevésével. •

Legyen X a legkisebb kritikus halmaz, amelyre létezik $e = uv$ él, hogy $v \in X$, $u \in R_1$. A 3.1.16 lemma (b) része szerint feltehető, hogy $u \in X$. Állítjuk, hogy e nem lép be semmilyen kritikus halmazba. Tegyük fel belép és legyen Y egy minimális kritikus, amelybe belép. Ekkor a 3.1.16 lemma (a) részét a t helyén v-vel alkalmazva először az X-re majd az X helyén Y-ra, azt kapjuk, hogy v elérhető $X \ominus Y$ minden pontjából. A 3.1.14 lemma szerint $X \cap Y$ pontos és $X \cap Y \cap R_1 \neq \emptyset$, vagyis $X \cap Y$ kritikus, ellentmondásban az X minimális választásával. • •

2013. május 14.file: japfe

3.2 Halmazfüggvények befok-korlátos fedései

Megmutatjuk, hogy Vidyasankar 3.1.7 tétele mögött valójában egy általánosabb eredmény húzódik. Egy $D = (V, A)$ digráfban egy $X \subseteq V$ halmaz $B(X)$ bejárata a $B(X) := \{v \in X$: létezik olyan $uv \in A$ él, amelyre $u \in V - X\})$ halmaz volt. Valamely $g : V \to \mathbf{Z}_+$ függvényre legyen

$$\beta_g(X) := \sum [g(v) : v \in B(X)].$$

Lemma 3.2.1 *A β_g függvény szubmoduláris, azaz $\beta_g(X) + \beta_g(Y) \geq \beta_g(X \cap Y) + \beta_g(X \cup Y)$. Amennyiben egyenlőség áll, úgy $g(v) > 0$ és $v \in B(X) \cap B(Y)$ esetén $v \in B(X \cup Y)$.*

Biz. Ha $v \in B(X \cap Y)$ és $v \in B(X \cup Y)$, úgy $v \in B(X) \cap B(Y)$, így ilyenkor v hozzájárulása mindkét oldalhoz $2g(v)$. Ha $v \in B(X \cup Y)$, akkor $v \in B(X)$ vagy $v \in B(Y)$, és hasonlóképp, ha $v \in B(X \cap Y)$, akkor $v \in B(X)$ vagy $v \in B(Y)$. Emiatt ha v hozzájárulása a jobboldalhoz $g(v)$, úgy a baloldalhoz is legalább $g(v)$, amiből a szubmodularitás következik. Amennyiben $v \in B(X) \cap B(Y)$, de $v \notin B(X \cup Y)$, úgy v hozzájárulása a baloldalhoz $2g(v)$, míg a jobboldalhoz $g(v)$, így $g(v) > 0$ miatt nem állhat egyenlőség. •

TÉTEL 3.2.2 *Legyen $D = (V, A)$ irányított gráf, $g : V \to \mathbf{Z}_+$ felső korlát függvény a csúcshalmazon. Legyen p pozitívan metsző szupermoduláris függvény. Akkor és csak akkor létezik olyan egészértékű $x : A \to \mathbf{Z}_+$ függvény, amelyre $\varrho_x(Z) \geq p(Z)$ minden $Z \subseteq V$ részhalmazra és $\varrho_x(v) \leq g(v)$ minden $v \in V$ csúcsra, ha minden $X \subseteq V$ halmazra*

$$p(X) \leq \beta_g(X). \tag{3.14}$$

Biz. Szükségesség. Amennyiben létezik a kívánt x, úgy tetszőleges $Z \subseteq V$ halmazra $p(Z) \leq \varrho_x(Z) \leq \sum[\varrho_x(v) : v \in B(Z)] \leq \sum[g(v) : v \in B(Z)]$, azaz (3.14) fennáll.

Elegendőség. Nevezzünk egy X halmazt pontosnak, ha (3.14)-t egyenlőséggel teljesíti, azaz $\beta_g(X) = p(X)$. Ha $g \equiv 0$, úgy (3.14) miatt $p \equiv 0$, és ezért $x \equiv 0$ jó lesz. Tegyük fel, hogy $g(v) > 0$ valamely v pontra. Legyen g' az a függvény, amely g-ből áll elő azáltal, hogy $g(v)$-t eggyel csökkentjük.

Amennyiben (3.14) g'-re nézve is fennáll, úgy indukcióval készen vagyunk. Ha viszont g'-re megsérül (3.14), úgy létezik egy olyan X (g-re és p-re nézve) pontos halmaz, amelyre $v \in B(X)$. Legyen X egy maximális ilyen pontos halmaz, és legyen $e = uv \in A$ egy X-be lépő él. Csökkentsük p értékét eggyel minden olyan halmazon, amelyen p pozitív volt és amelybe e belépett. A keletkező p' függvényről látható, hogy szintén pozitívan metsző szupermoduláris.

Állítás 3.2.1 *p'-re és g'-re teljesül a* (3.14) *feltétel.*

Biz. Ha nem teljesülne, úgy létezne egy (g-re és p-re nézve) pontos Y halmaz, amelyre $v \in B(Y)$ és $u \in Y$. Most X és Y metsző pontos halmazok, így $\beta_g(X) + \beta_g(Y) = p(X) + p(Y) \leq p(X \cap Y) + p(X \cup Y) \leq \beta_g(X \cap Y) + \beta_g(X \cup Y)$. A 3.2.1 Lemma miatt végig egyenlőség áll és emiatt $v \in B(X \cup Y)$. Ez viszont ellentmond az X maximális választásának. •

Indukcióval létezik x', amely teljesíti a tétel kívánságait p'-re és g'-re nézve. Jelölje x azt a függvényt, amely x'-ből áll elő azáltal, hogy az e élen az értékét eggyel növeljük. Ekkor x teljesíti a tétel kívánságait p-re és g-re vonatkozólag. • •

Megjegyzés Mi történik, ha a 3.2.2 tételben a pontok befokai helyett a kifokokra írunk elő felső korlátot? Meglepő módon, így már NP-teljes problémákhoz jutunk. Legyen ugyanis egy $D = (V, A)$ digráfnak s adott pontja, és definiáljuk a p függvényt a következőképp: $p(X) = 1$, ha $\emptyset \subset X \subseteq V - s$ és $p(X) = 0$ különben. Legyen $g \equiv 1$. Ha most x olyan egész vektor, amelyre egyrészt minden v csúcsra $\delta_x(v) \leq 1$, másrészt minden $\emptyset \subset X \subseteq V - s$ halmazra $\varrho_x(Z) \geq 1$, akkor x egy olyan (V, F) digráf élhalmazának incidencia vektora, amelyben minden csúcs kifoka legfeljebb 1 és amely egy feszítő fenyő. Vagyis, F egy (s gyökerű) Hamilton út. Márpedig a Hamilton út létezése NP-teljes probléma.

3.2.1 Következmények

Vidyasankar tétele újra

Biz. (az elegendőségé Vidyasankar 3.1.7 tételében)

Figyeljük meg, hogy a $p(X) := (k - \varrho(X))^+$ $(\emptyset \subset X \subseteq V - s)$ függvény pozitívan metsző szupermoduláris. A $g(v) := p(v)$ $(v \in V - s)$ függvényre a (3.10) és (3.14) feltételek ekvivalensek. Így a 3.2.2 tétel szerint létezik egy $x : A \to \mathbf{Z}_+$ függvény, amelyre $\varrho_x(v) = g(v)$ (minden $v \in V - s$-re) és $\varrho_x(Z) \geq p(Z)$ (minden $Z \subseteq V - s$-re). Ha most a digráf minden e éléhez még $x(e)$ párhuzamos példányt beveszünk, akkor a keletkező D^+ digráfban minden $v \in V - s$ csúcs befoka pontosan k és minden $\emptyset \subset X \subseteq V - s$ halmaz befoka legalább k, így Edmonds tétele alapján D^+ felbomlik k élidegen feszítő fenyőre, így az ezeknek megfelelő fenyők D-ben fedik d élhalmazát. •

Irányított vágások lefogása

A Lucchesi-Younger tétel irányított vágások minimális lefogásával foglalkozott. Most olyan lefogás létezésére vagyunk kiváncsiak, melyben a ponok befokaira korlát adott. A következő tételben érdekes megfigyelni Tutte 1-faktor tételével való formai analógiát.

TÉTEL 3.2.3 *Egy irányított $D = (V, A)$ gráfban akkor és csak akkor létezik olyan fenyves, amelynek élei minden irányított vágást lefognak, ha bármely nemüres $X \subset V$ halmazt elhagyva legfeljebb $|X|$ darab olyan komponens keletkezik, amelybe nem megy be él.*

Biz. Szükségesség. Ha $F \subseteq A$ lefogja az irányított vágásokat, úgy F $D - X$ minden olyan komponenséből tartalmaz kilépő élt, amelybe nem lép be él. Miután F fenyves, következik, hogy legfeljebb $|X|$ ilyen komponens lehet $D - X$-ben.

Az elegendőséghez legyen $p(X) = 0$, ha X-ből lép ki él vagy $X = \emptyset$, és $p(X) := c(X)$ különben (ahol $c(X)$ a $D - X$ irányítatlan értelemben vett komponenseinek a száma). Ekkor p pozitívan metsző szupermoduláris. Legyen $g \equiv 1$. Amennyiben létezik egészértékű x, amelyre $\varrho_x(Z) \geq p(Z)$ minden $Z \subseteq V$-re és $\varrho_x(v) \leq 1$ minden v csúcsra, úgy ezen utóbbi feltétel miatt x $0 - 1$-értékű, és az $F =: \{e : x(e) = 1, e \in A\}$ halmaz minden irányított vágást lefog. Ekkor tehát $\varrho_F(v) \leq 1$ minden v csúcsra. Az is feltehető, hogy F fenyves, mert ha tartalmazna irányított kört, akkor annak bármely élét kihagyva, továbbra is az irányított vágások lefogását kapnánk.

Tegyük most fel, hogy nem létezik a szóbanforgó x. Ekkor a 3.2.2 tétel miatt létezik olyan Z halmaz, amelyre $p(Z) > g(B(Z)) = |B(Z)|$. Legyen $X = B(Z)$. Miután $p(Z) > 0$, Z-ből nem lép ki él. Ezért a $D - Z$ minden komponensei $D - X$-nek is komponense. Ezért $D - X$ azon komponenseinek a száma, melyekbe nem lép él, legalább $p(Z)$, ami nagyobb, mint $|X|$, ellentmondásban a tétel feltevésével. •

Feladat 3.12 *Adott $g : V \to \mathbf{Z}_+$ felső korláthoz egy $D = (V, A)$ digráfban akkor és csak akkor létezik az irányított vágásoknak olyan F lefogása, amelyre $\varrho_F(v) \leq g(v)$ minden $v \in V$ csúcsra, ha bármely nemüres $X \subset V$ halmazt elhagyva legfeljebb $g(X)$ darab olyan komponens keletkezik, amelybe nem megy be él.*

Páros gráfok

A következő alkalmazás Rado matroidos tételének és Lovász egy eredményének közös általánosítása.

TÉTEL 3.2.4 *Legyen $G = (S, T; E)$ egyszerű páros gráf, $p : 2^S \to \mathbf{Z}_+$ pozitívan metsző szupermoduláris függvény, $g : S \to \mathbf{Z}_+$ pedig egy felső korlátként szolgáló függvény. Legyen továbbá $M = (T, r)$ egy r rangfüggvényű matroid a T alaphalmazon. Akkor és csak akkor létezik G éleinek olyan $F \subseteq E$ részhalmaza, amelyre*

$$r(\Gamma_F(X)) \geq p(X) \text{ minden } X \subseteq S \text{ -re és} \tag{3.15}$$

$$d_F(v) \leq g(v) \text{ minden } v \in S \text{ -re, ha} \tag{3.16}$$

$$p(X) \leq r(\Gamma_E(Y)) + g(X - Y) \text{ fennáll minden } Y \subseteq X \subseteq S \text{ halmazpárra.} \tag{3.17}$$

Biz. Ha létezik a kívánt F, akkor $p(X) \leq r(\Gamma_F(X)) = r(\Gamma_F(Y) \cup \Gamma_E(X - Y)) \leq r(\Gamma_F(Y)) + r(\Gamma_F(X - Y)) \leq r(\Gamma_E(Y)) + |\Gamma_F(X - Y)| \leq r(\Gamma_E(Y)) + g(X - Y)$, vagyis (3.17) szükséges.

Az elegendőséghez irányítsuk meg G éleit T-ből S felé és jelölje $D = (V, A)$ a keletkező digráfot. Minden $X \subseteq S, X' \subseteq T$ halmazpárra legyen $p'(X \cup X') := (p(X) - r(X'))^+$. Könnyen ellenőrizhető, hogy p' is pozitívan metsző szupermoduláris. Terjesszük ki g-t az egész $S \cup T$ halmazra a $g(t) = 0$ $(t \in T)$ értelmezéssel. Állítjuk, hogy D-re és p'-re vonatkozóan teljesül a (3.14) feltétel, azaz nem létezik $X \subseteq S, X' \subseteq T$, melyekre $g(B(X \cup X')) < p'(X \cup X') = p(X) - r(X')$. Ha ugyanis létezne, akkor az $Y := X - B(X \cup X')$ halmazra a B függvény jelentése miatt $\Gamma_E(Y) \subseteq X'$, és ezért $r(\Gamma_E(Y)) \leq r(X')$. De ekkor $g(X - Y) = g(B(X \cup X')) < p(X) - r(X') \leq p(X) - r(\Gamma_E(Y))$, ellentmondásban a (3.17) feltevéssel.

A 3.2.2 tétel szerint tehát létezik a megirányított G éleinek egy F részhalmaza (melyet jelölésben nem különböztetünk meg a G éleinek megfelelő éleinek megfelelő részhalmazától), amelyre $\varrho_F(X \cup X') \geq p'(X \cup X')$ minden $X \subseteq S$ és $X' \subseteq T$ halmazra, és $\varrho_F(v) \leq g(v)$ minden $v \in S$-re. Állítjuk, hogy F teljesíti (3.15)-t. Valóban $X \subseteq S$-re legyen $X' := \Gamma_F(X)$. Ekkor $0 = \varrho_F(X \cup X') \geq p'(X \cup X') = p(X) - r(X')$, azaz $r(\Gamma_F(X)) \geq p(X)$. •

Következmény 3.2.5 (Lovász) *Legyen $p : 2^S \to \mathbf{Z}_+$ pozitívan metsző szupermoduláris függvény, amelyre ráadásul minden $A \subseteq S, v \in S - A$ esetén*

$$p(A) + p(v) \geq p(A + v). \tag{3.18}$$

Amennyiben $G = (S, T; E)$ egy olyan egyszerű páros gráf, amelyre $|\Gamma_E(X)| \geq p(X)$ minden $X \subseteq S$ halmazra fennáll, de G bármely élét kihagyva ez már nem teljesül, akkor $d_E(v) = p(v)$ minden $v \in S$-re.

Biz. Legyen $g(v) := p(v)$ $(v \in S)$. Tegyük fel indirekt, hogy van olyan $v \in S$ pont, amelyre $d_E(v) > p(v)$. G minimalitása miatt ez azt jelenti, hogy nem létezik olyan $F \subseteq E$ részhalmaz, amelyre $|\Gamma_F(X)| \geq p(X)$ minden $X \subseteq S$-re és $d_F(v) \leq g(v)$ minden $v \in S$-re.

Az előző tétel szerint ekkor léteznek olyan $Y \subseteq X \subseteq S$ halmazok, melyekre $|\Gamma_E(Y)| + g(X - Y) < p(X)$. Mivel $g(X - Y) = \sum[p(v) : v \in X - Y]$, így $|\Gamma_E(Y)| < p(X) - \sum[p(v) : v \in X - Y] \leq p(Y)$, ellentmondás. (Az utolsó egyenlőtlenség (3.18) következménye). •

Gyakorlat 3.13 *Legyen $p(X) := a|X| + b$ $(X \subseteq S)$, ahol $a > 0, b \geq 0$ egészek. Igazoljuk, hogy p teljesíti a Lovász tételben tett kikötéseket.*

Gyakorlat 3.14 *Mutassuk meg, hogy $a = 1, b = 0$ választással megkapjuk Hall tételét. Milyen tételt kapunk $a = 1, b = 1$ választással?*

Következmény 3.2.6 (Rado) *Legyen $M = (T, r)$ r rangfüggvényű matroid a T alaphalmazon. $G = (S, T; E)$ páros gráfnak akkor és csak akkor van olyan S-t fedő párosítása, amely T-ben az M független halmazát fedi, ha S minden Y részhalmazára $r(\Gamma_E(Y)) \geq |Y|$.*

Biz. A szükségesség kézenfekvő. Az elegendőséghez legyen $g(v) = 1$ minden $v \in S$-re és $p(X) = |X|$ minden $X \subseteq S$-re. Ekkor $Y \subseteq X \subseteq S$ esetén $p(X) = |X| = |Y| + |X - Y| \leq r(\Gamma_E(Y)) + |X - Y| = r(\Gamma_E(Y)) + g(X - Y)$, és így a 3.2.4 tétel szerint létezik egy $F \subseteq E$ élhalmaz, amelyre $r(\Gamma_F(X)) \geq |X|$ minden $X \subseteq S$-re és $d_F(v) \leq 1$ minden $v \in S$-re fennáll. Ebből adódik, hogy minden $X \subseteq S$-re $|X| \geq |\Gamma_F(X)| \geq r(\Gamma_F(X)) \geq |X|$, és így $r(\Gamma_F(X)) = |X|$, vagyis F egy S-t fedő párosítás és $\Gamma_F(S)$ független M-ben. •

2013. május 14.file: absz

4. Fejezet

FEDÉSEK IRÁNYÍTOTT GRÁFFAL

A Gráfelmélet előadásban szerepelt Mader irányított leemelési tétele:

TÉTEL 4.0.7 (W. Mader) *Legyen a $D = (U+z, A)$ digráf U-ban k-élösszefüggő ($k \geq 1$), és tegyük fel, hogy $\varrho(z) = \delta(z)$. Ekkor a z-be belépő és z-ből kilépő élek párba állíthatók úgy, hogy a párokat egyszerre leemelve k-élösszefüggő digráfot kapunk az U csúcshalmazon.*

Az is könnyen belátható, hogy ez ekvivalens az alábbi fokszám-előírt élösszefüggőség növelési tétellel.

TÉTEL 4.0.8 *Adott $D = (U, E)$ digráf és $m_{be} : U \to \mathbf{Z}_+$, $m_{ki} : U \to \mathbf{Z}_+$ fokszám-előírások. Akkor és csak akkor létezik olyan $H = (U, F)$ digráf, amelyre $\varrho_H(v) = m_{be}(v)$ és $\delta_H(v) = m_{ki}(v)$ teljesül minden $v \in U$ pontra és $D + H$ k-élösszefüggő, ha $m_{be}(U) = m_{ki}(U)$, továbbá*

$$m_{be}(X) \geq k - \varrho_D(X) \tag{4.1}$$

és

$$m_{ki}(X) \geq k - \delta_D(X) \tag{4.2}$$

teljesül minden $\emptyset \neq X \subset U$ részhalmazra.

4.1 Halmazfüggvények fedése

Jelen célunk azt megmutatni, hogy Mader tétele valójában egy jóval általánosabb eredmény speciális esete. Legyen p nemnegatív egészértékű halmazfüggvény a V alaphalmazon, amelyre $p(\emptyset) = p(V) = 0$. Azt mondjuk, hogy p pozitívan keresztező szupermoduláris, ha minden olyan keresztező X, Y halmazpárra, melyekre $p(X) > 0, p(Y) > 0$ teljesíti a szupermodularitási egyenlőtlenséget. Azt mondjuk, hogy egy digráf fedi p-t, ha minden X halmaz befoka legalább $p(X)$.

TÉTEL 4.1.1 *Legyen $p \geq 0$ pozitívan keresztező szupermoduláris halmazfüggvény V részhalmazain. Legyen $m_{ki} : V \to \mathbf{Z}_+$ és $m_{be} : V \to \mathbf{Z}_+$ a pontok ki- és befokaira vonatkozó előírás, melyekre $\gamma := m_{be}(V) = m_{ki}(V)$. Akkor és csak akkor létezik olyan $H = (V, F)$ irányított gráf, amely fedi p-t és amelyben*

$$\delta_H(v) = m_{ki}(v) \text{ és } \varrho_H(v) = m_{be}(v) \tag{4.3}$$

minden csúcsra fennáll, ha minden $X \subseteq V$-re

$$p(X) \leq m_{be}(X) \tag{4.4}$$

és

$$p(V - X) \leq m_{ki}(X) \tag{4.5}$$

fennáll. Amennyiben H hurokmentességét is előírjuk, úgy a fenti feltételeken túl még azt is meg kell követelni, hogy minden v csúcsra

$$m_{be}(v) + m_{ki}(v) \leq \gamma. \tag{4.6}$$

Biz. Tegyük fel, létezik p-t fedő és (4.3)-t kielégítő $H = (V, F)$ digráf. Ekkor bármely $X \subseteq V$ részhalmazra $p(X) \leq \varrho_H(X) \leq \sum_{v \in X} \varrho_H(v) = m_{be}(X)$ és $p(V - X) \leq \varrho_H(V - X) = \delta_H(X) \leq \sum_{v \in X} \delta_H(v) = m_{ki}(X)$, azaz a (4.4) és (4.5) feltételek szükségesek. Ha rádásul H hurokmentes, akkor tetszőleges v pontra a v fejű és v tövű élek különbözőek, így ezek össz-száma legfeljebb γ, vagyis (4.6) is szükséges.

Tegyük fel indirekt, hogy nem létezik a kívánt tulajdonságú digráf. Miután $m_{be}(V) = m_{ki}(V)$, indukcióval könnyen látszik, hogy van olyan H digráf (melyben lehetnek hurkok vagy párhuzamos élek), amely kielégíti a be- és kifokszám előírást. Ráadásul, ha (4.6) fennáll, úgy H választható hurokmentesnek is. Valóban, egy v-nél lévő f hurkot megszüntethetünk azáltal, hogy valamely xy ($x \neq v, yy \neq v$) élt és f-t lecseréljük az xv, vy élekre. Ezáltal a pontok fokszámai nem változnak, a halmazok befoka nem csökken, és így továbbra is p-t fedő digráfot kapunk. Ezen hurok-megszüntető művelet csak akkor nem hajtható végre, ha nincs xy él, azaz ha minden él egyik vége v. De ekkor $m_{be}(v) + m_{ki}(v)$ egyenlő az élek γ száma plusz a hurokélek száma v-nél, azaz (4.6) megsérül.

Legyen $q_H(X) := p(X) - \varrho_H(X)$, és $\mu_H := \max\{q_H(X) : X \subseteq V\}$, vagyis $q_H(X)$ az X halmaz be-hiánya, míg μ_H a be-hiányok maximuma. Legyen $\mathcal{F}_H := \{X \subset V : q_H(X) = \mu_H\}$, azaz $\mathcal{F}_H$ a maximális be-hiányú halmazok családja. Mivel $p(\emptyset) = 0 = \varrho_H(\emptyset)$, így $\mu_H \geq 0$, és mivel $\mu_H = 0$ ekvivalens azzal, hogy H fedi p-t, a μ_H érték szükségképpen pozitív. Ebből következik, hogy $p(X) > 0$ minden $X \in \mathcal{F}_H$ halmazra.

Állítás 4.1.1 *Legyen X és Y az $\mathcal{F}_H$ két keresztező tagja. Ekkor mind $X \cap Y$, mind $X \cup Y$ eleme $\mathcal{F}_H$-nek.*

Biz. Mivel ϱ_H szubmoduláris, p pozitívan keresztező szupermoduláris, $p(X) > 0$ és $p(Y) > 0$, kapjuk, hogy $\mu_H + \mu_H = q_H(X) + q_H(Y) \leq q_H(X \cap Y) + q_H(X \cup Y) \leq \mu_H + \mu_H$, amiből $q_H(X \cap Y) = \mu_H$ és $q_H(X \cup Y) = \mu_H$, és az állítás következik. •

Válasszuk H-t olyannak, hogy

$$(*) \quad \mu_H \text{ a lehető legkisebb,}$$

és ezen belül

$$(**) \quad |\mathcal{F}_H| \text{ a lehető legkisebb.}$$

Legyen K egy minimális tagja $\mathcal{F}_H$-nek, míg $L \supseteq K$ egy maximális tagja $\mathcal{F}_H$-nek. H-nak van olyan $e = uv$ éle, amelyre $u, v \in K$, mert különben $m_{be}(K) = \sum[\varrho_H(z) : z \in K] = \varrho_H(K) = p(K) - \mu_H < p(K)$, és ez ellentmondana a (4.4) feltevésnek. Hasonlóképp, H-nak van olyan $f = xy$ éle, amelyre $x, y \in V - L$ mert különben $m_{ki}(V - L) = \sum[\delta_H(z) : v \in V - L] = \delta_H(V - L) = \varrho_H(L) = p(L) - \mu_H < p(L)$, és ez ellentmondana a (4.5) feltevésnek.

Módosítsuk a H-t úgy, hogy helyettesítjük az e és f éleket az uy és xv élekkel. Jelölje H' az így kapott digráfot. H' is nyilván kielégíti a fokszám előírást. A következő állítás is nyilvánvaló.

Állítás 4.1.2 *Ha $\varrho_{H'}(X) < \varrho_H(X)$ valamilyen $X \subseteq V$ részhalmazra, akkor vagy uv belép X-be és xy kilép X-ből, vagypedig uv kilép X-ből és xy belép X-be* (és speciálisan e és f egyike sem hurok). •

Következik, hogy $\varrho_{H'}(X) \geq \varrho_H(X) - 1$ minden $X \subseteq V$ részhalmazra. Nem létezhet olyan $X \in \mathcal{F}_H$ halmaz, amelyre $\varrho_{H'}(X) = \varrho_H(X) - 1$, mert különben X és K keresztező a 4.1.2 állítás szerint és akkor $X \cap K \in \mathcal{F}_H$ a 4.1.1 állítás szerint, ellentmondásban a K minimális választásával. Kapjuk, hogy $\mu_{H'} \leq \mu_H$ és valójában itt egyenlőségnek kell állnia a $(*)$ feltevés folytán.

Mivel $\varrho_{H'}(K) > \varrho_H(K)$, a K halmaz nincs $\mathcal{F}_{H'}$-ben. A $(**)$ feltevés miatt kell egy olyan X halmaznak léteznie, amely $\mathcal{F}_{H'} - \mathcal{F}_H$-ben van. Ekkor $\varrho_{H'}(X) < \varrho_H(X)$, és így $\varrho_{H'}(X) = \varrho_H(X) - 1$. Alkalmazzuk a 4.1.2 állítást. Szimmetria miatt feltehetjük, hogy uv belép X-be és xy kilép X-ből.

Kapjuk, hogy $q_H(X) + 1 = q_{H'}(X) = \mu_{H'} = \mu_H$. Miután $q_{H'}(X) = \mu_{H'}$ és $q_H(K) = \mu_H$ pozitív számok, a $p(X)$ és $p(K)$ értékek is pozitívak. Mivel K és X keresztező, a K minimális választása folytán $\mu_H + (\mu_H - 1) = q_H(K) + q_H(X) \leq q_H(K \cap X) + q_H(K \cup X) \leq (\mu_H - 1) + \mu_H$, amiből $q_H(K \cup X) = \mu_H$. Vagyis az $X' := K \cup X$ halmaz eleme $\mathcal{F}_H$-nek. Mivel L és X' vagy keresztező, vagy $L \subset X'$, a 4.1.1 állítás nyomán azt nyerjük, hogy $X' \cup L \in \mathcal{F}_H$, ellentmondásban az L maximális választásával. • •

TÉTEL 4.1.2 *Legyen $p \geq 0$ pozitívan keresztező szupermoduláris halmazfüggvény V részhalmazain. Adott γ egészre akkor és csak akkor létezik egy legfeljebb γ élű p-t fedő H digráf, ha*

$$\sum[p(X) : X \in \mathcal{F}] \leq \gamma \tag{4.7}$$

fennáll a V minden $\mathcal{F}$ partíciójára és ko-partíciójára. Más szóval, V minden $\{V_1, \ldots, V_t\}$ partíciójára $\sum_{i=1}^{t} p(V_i) \leq \gamma$ és $\sum_{i=1}^{t} p(V - V_i) \leq \gamma$). *$H$ választható hurokmentesnek.* •

Biz. A feltételek szükségessége nyilvánvaló. Az elegendőség bizonyításához megkonstruálunk egy m_{be} és egy m_{ki} függvényt, melyek teljesítik a (4.4) és (4.5) feltételeket és amelyekre $m_{be}(V) = \gamma = m_{ki}(V)$, majd ezekre alkalmazzuk a 4.1.1 tételt. Szimmetria miatt csak m_{be} megadásával foglalkozunk. E célból legyen m_{be} (4.4)-t kielégítő egészértékű függvény V-n, melyre $m_{be}(V) \geq \gamma$ és tegyük fel, hogy m_{be} minimális (4.4)-re tekintettel.

Állítás 4.1.3 $m_{be}(V) = \gamma$

Biz. Tegyük fel indirekt, hogy $m_{be}(V) > \gamma$. Az m_{be} minimalitása folytán minden olyan $v \in V$ elem, amelyre $m_{be}(v) > 0$ benne van egy X be-pontos halmazban és erre persze $p(X)$ pozitív. Valójában minden elem benne van be-pontos halmazban, mert $m_{be}(v) = 0$ esetén $0 = m_{be}(v) \geq p(v) \geq 0$ miatt $\{v\}$ is be-pontos. Van tehát egy olyan be-pontos halmazokból álló halmazrendszer, amely fedi V-t és amelynek minden legalább két elemű tagjára $p(X)$ pozitív. Legyen $\mathcal{F}$ minimális ilyen halmazrendszer. Ekkor $\mathcal{F}$-nek nincs két egymást tartalmazó tagja.

Ha $\mathcal{F}$ páronként diszjunkt halmazokból áll, azaz partíciót alkot, úgy $\gamma < m_{be}(V) = \sum[m_{be}(X) : X \in \mathcal{F}] = \sum[p(X) : X \in \mathcal{F}]$, ellentmondásban a (4.7) feltétellel.

Legyen most az $\mathcal{F}$-nek két egymást átmetsző X, Y tagja. Ekkor egyikük sem egyelemű, így $p(X)$ és $p(Y)$ is pozitív. Állítjuk, hogy $X \cup Y = V$. Ellenkező esetben ugyanis X és Y keresztezőek volnának és akkor $m_{be}(X)+m_{be}(Y) = p(X)+p(Y) \leq p(X \cap Y)+p(X \cup Y) \leq m_{be}(X \cap Y)+m_{be}(X \cup Y) = m_{be}(X)+m_{be}(Y)$, amiből adódik, hogy minden becslés egyenlőséggel teljesül, és így $p(X \cap Y) = m_{be}(X \cap Y)$, $p(X \cup Y) = m_{be}(X \cup Y)$, vagyis ilyenkor $X \cup Y$ is be-pontos volna, ellentétben $\mathcal{F}$ minimalitásával.

Mivel $X \cup Y = V$, így $\mathcal{F} = \{X, Y\}$, azaz $\mathcal{F}$ (két tagból álló) ko-partíció. De ekkor $p(X) + p(Y) = m_{be}(X) + m_{be}(Y) \geq m_{be}(V) > \gamma$, ellentmondásban a (4.7) feltétellel. •

A 4.1.1 tételt alkalmazva a bizonyítás teljes. • •

TÉTEL 4.1.3 *Legyen $p \geq 0$ pozitívan keresztező szupermoduláris halmazfüggvény V részhalmazain és $g_{be} : V \to \mathbf{Z}_+ \cup \{\infty\}$ illetve $g_{ki} : V \to \mathbf{Z}_+ \cup \{\infty\}$ a pontok befokaira illetve kifokaira vonatkozó felső korlátok. Akkor és csak akkor létezik p-t fedő $H = (V, F)$ irányított gráf, amelyben minden v csúcsra*

$$\varrho_H(v) \leq g_{be}(v) \text{ és } \delta_H(v) \leq g_{ki}(v) \tag{4.8}$$

ha minden $X \subseteq V$-re

$$p(X) \leq g_{be}(X), \tag{4.9}$$

és

$$p(V - X) \leq g_{ki}(X), \tag{4.10}$$

továbbá V minden $\{V_1, \dots, V_t\}$ partíciójára

$$\sum_i p(V - V_i) \leq g_{be}(V), \tag{4.11}$$

és

$$\sum_i p(V_i) \leq g_{ki}(V). \tag{4.12}$$

Amennyiben $g_{be}(V) \leq g_{ki}(V)$, úgy (4.9) implikálja (4.12)-t, azaz ilyenkor már a (4.9), (4.10) és (4.11) feltételek elegendőek p-t fedő és (4.8)-t teljesítő digráf létezéséhez. Ha ráadásul $g_{be}(V) = g_{ki}(V)$, úgy már a (4.9) és (4.10) feltételek is elegendőek.

Biz. Tegyük fel először, hogy létezik egy fokszám feltételeket kielégítő és p-t fedő H digráf, melynek élszámát jelölje γ. Ekkor $g_{be}(X) = \sum[g_{be}(v) : v \in X] \geq \sum[\varrho_H(v) : v \in X] \geq \varrho_H(X) \geq p(X)$ és $g_{ki}(V - X) = \sum[g_{ki}(v) : v \in V - X] \geq \sum[\delta_H(v) : v \in V - X] \geq \delta_H(V - X) = \varrho_H(X) \geq p(X)$, vagyis (4.9) és (4.10) szükségesek. Egy $\{V_1, \dots, V_t\}$ partícióra $\sum p(V_i) \leq \sum \varrho_H(V_i) \leq \gamma \leq g_{ki}(V)$ és $\sum p(V - V_i) \leq \sum \varrho_H(V_i) \leq \gamma \leq g_{be}(V)$, és így (4.11) és (4.12) is szükséges.

Az elegendőség igazolásához feltehető, hogy mind g_{be}, mind g_{ki} véges értékű, mert ha az egyik valamely csúcsban végtelen, ott egy kellően nagy számmal helyettesítve a feltételek nem romlanak el. Feltehető továbbá, hogy mind g_{be}, mind g_{ki} minimális abban az értelemben, hogy bármely pozitív értéket eggyel csökkentve a feltételek valamelyike már megsérül.

Állítás 4.1.4 $g_{be}(V) = g_{ki}(V)$.

Biz. Indirekt tegyük fel, hogy mondjuk $g_{be}(V) < g_{ki}(V)$. Ekkor tetszőleges partícióra $\sum_i p(V_i) \leq \sum_i g_{be}(V_i) = g_{be}(V) < g_{ki}(V)$ vagyis (4.12) szigorúan teljesül. Így ha egy pozitív $g_{ki}(v)$ értéket eggyel csökkentünk, akkor szükségképpen (4.10) sérül meg. Következik, hogy minden olyan v pont, amelyre $g_{ki}(v)$ pozitív, benne van egy olyan **ki-pontos**nak nevezett X halmazban, amelyre $g_{ki}(X) = p(V - X)$. Tekintsünk maximális ki-pontos halmazoknak egy olyan minimális $\mathcal{F} = \{X_1, \dots, X_t\}$ rendszerét, amely minden olyan v pontot tartalmaz, melyre $g_{ki}(v) > 0$. A pozitívan keresztező szupermodularitás miatt $\mathcal{F}$ keresztezés mentes. Tegyük fel először, hogy $\mathcal{F}$ tagjai páronként diszjunktak. Amennyiben $\mathcal{F}$ nem fedi a teljes V-t, legyen $X_0 := V - \cup_i(X_i)$. $0 \leq p(V - X_0) \leq g_{ki}(X_0) = 0$ miatt $p(V - X_0) = 0$ és így az $\{X_0, X_1, \dots, X_t\}$ partícióra $g_{be}(V) < g_{ki}(V) = \sum_i g_{ki}(X_i) = \sum_i p(V - X_i)$, ellentmondásban az (4.11) feltétellel.

Tehát $\mathcal{F}$ nem részpartíció, így van két ko-diszjunkt tagja, mondjuk X_1 és X_2. A t minimalitása miatt $\mathcal{F} = \{X_1, X_2\}$. Ekkor a $V_1 := V - X_1$ és $V_2 := V - X_2$ diszjunktak, így (4.12) nyomán $g_{ki}(V) \leq g_{ki}(V - V_1) + g_{ki}(V - V_2) = p(V_1) + p(V_2) \leq g_{ki}(V)$. Emiatt végig egyenlőség van, de ez ellentmond a fenti megállapításnak, miszerint (4.12) szigorú egyenlőtlenséggel teljesül. •

A 4.1.4 állítás nyomán alkalmazhatjuk a 4.1.1 tételt az $m_{be} := g_{be}$ és $m_{ki} := g_{ki}$ függvényekre. A tétel utolsó részéhez tegyük fel, hogy $g_{be}(V) \leq g_{ki}(V)$. Ekkor (4.9) alapján $\sum_i p(V_i) \leq \sum_i g_{be}(V_i) = g_{be}(V) \leq g_{ki}(V)$, azaz (4.12) következik. Ha ráadásul $g_{be}(V) = g_{ki}(V)$, úgy (4.10) alapján $\sum_i p(V - V_i) \leq \sum_i g_{ki}(V_i) = g_{ki}(V) = g_{be}(V)$, azaz (4.11) is következik. • •

Következmény 4.1.4 *Legyen p pozitívan keresztező szupermoduláris halmazfüggvény V részhalmazain és $g_{be} : V \to \mathbf{Z}_+ \cup \{\infty\}$ illetve $g_{ki} : V \to \mathbf{Z}_+ \cup \{\infty\}$ a pontok befokaira illetve kifokaira vonatkozó felső korlátok. Akkor és csak akkor létezik p-t fedő $H = (V, F)$ irányított gráf,*

(i) *amelyben minden v csúcsra $\varrho_H(v) \leq g_{be}(v)$, ha* (4.9) *és* (4.11) *teljesül,*

(ii) *amelyben minden v csúcsra $\delta_H(v) \leq g_{ki}(v)$, ha* (4.10) *és* (4.12) *teljesül.*

(iii) *Ha külön-külön létezik* (i)*-t teljesítő és* (ii)*-t teljesítő digráf is, akkor létezik olyan is, amely mindkettőt teljesíti.* •

4.2 A leemelési tétel kiterjesztései

Egy digráfot akkor nevezünk (k, l)-**élösszefüggő**nek ($l \leq k$), ha létezik egy s csúcsa úgy, hogy minden s-t nem tartalmazó halmaz befoka legalább k és minden s-t tartalmazó halmaz befoka legalább l. Ez azzal ekvivalens, hogy s-ből minden csúcsba vezet k élidegen út, és minden csúcsból vezet s-be l élidegen út. A $l = k$ esetben visszakapjuk a k-élösszefüggőséget, míg ha $l = 0$, úgy a gyökeres k-élösszefüggőséghez jutunk.

Gyakorlat 4.1 *Igazoljuk, hogy ha a D digráf (k, l)-élösszefügő az s csúcsra nézve, akkor bármely s' csúcsra l élidegen s-ből s'-be vezető irányított út éleinek megfordításával keletkező D' digráf (k, l)-élösszefüggő az s' csúcsra nézve.*

A k-élösszefüggőségre vonatkozó Mader tétel általánosítása a következő.

TÉTEL 4.2.1 *Legyen a $D = (U + z, E)$ digráfnak $s \in U$ olyan gyökérpontja, amelyre nézve D a z-től eltekintve (k, l)-élösszefüggő* (azaz minden $u \in U$ csúcsra s-ből vezet u-ba k és u-ból vezet s-be l élidegen út). *Tegyük fel, hogy $\varrho(z) = \delta(z)$. Ekkor a z-be bemenő és z-ből kilépő élek párba állíthatók úgy, hogy e párokat egyszerre leemelve (k, l)-élösszefüggő digráfot kapunk az U csúcshalmazon.*

Biz. Minden $v \in U$ csúcsra legyen $m_{be}(v)$ a z-ből v-be menő párhuzamos élek száma, míg $m_{ki}(v)$ a v-ből z-be menő párhuzamos élek száma. Jelölje ϱ' az U által feszített digráf befok függvényét és definiáljuk p-t a következőképpen: $p(\emptyset) = p(U) = 0$, $p(X) := (k - \varrho'(X))^+$ ha $\emptyset \subset X \subseteq U - s$, és $p(X) := (l - \varrho'(X))^+$ ha $s \in X \subset U$. Könnyen ellenőrizhető, hogy a 4.1.1 tétel alkalmazható, és így létezik egy $H = (V, F)$ digráf, amelyre $\delta_H(v) = m_{ki}(v)$ és $\varrho_H(v) = m_{be}(v)$ minden $v \in U$ csúcsra fennáll, és amely fedi p-t. Ezen utóbbi tulajdonság könnyen ellenőrizhetően azzal ekvivalens, hogy $D + H$ (k, l)-élösszefüggő. Továbbá, a fokszám előírások folytán a H minden egyes uv éléhez hozzárendelhetjük D-nek egy uz és egy zv élét, különbözőhöz különbözőt, és így H valóban a z teljes leemelésével áll elő. •

Mader tételének egy másirányú kiterjesztése is kiadódik speciális esetként.

TÉTEL 4.2.2 *Legyen a $D = (U + z, A)$ digráfban $\varrho(z) = \delta(z)$. Legyen $U' \subseteq U$ olyan halmaz, amely tartalmazza az összes z-vel szomszédos pontot* (azaz $S \subseteq U'$). *Tegyük fel, hogy D az U'-ben k-élösszefüggő* ($k \geq 1$). *Ekkor minden $e = zt$ élhez létezik olyan $f = uz$ él, amelyre az $\{e, f\}$ élpár leemelésével kapott D^{ef} digráf is U'-ben k-élösszefüggő.*

Biz. Legyen $m_{be}(v)$, $m_{ki}(v)$ és ϱ' ugyanaz, mint az előbbi bizonyításban. Definiáljuk a p' halmazfüggvényt a következőképpen Legyen $p'(\emptyset) = p'(U') = 0$, míg $\emptyset \subset X' \subset U'$ esetén legyen $p'(X') := \max\{(k - \varrho'(X))^+\}$, ahol a maximum az olyan $X \subseteq U$ halmazokra megy, melyekre $X \cap U' = X'$. Nem nehéz ellenőrizni, hogy az így kapott p' pozitívan keresztező szupermoduláris az U' alaphalmazon (lásd alább a 4.2 gyakorlatot), és a 4.1.3 tétel alkalmazható. •

Gyakorlat 4.2 *Igazoljuk, hogy a* 4.2.2 *tétel bizonyításában szereplő p' halmazfüggvény valóban pozitívan keresztező szupermoduláris.*

4.3 Keresztező párhalmazok fedése

Legyen V adott alaphalmaz. Egy $X = (X_K, X_B)$ részhalmazokból álló párt, amelyre $X_B \subseteq X_K \subseteq V$ **párhalmaz**nak nevezzük. X_K a párhalmaz **külső**, míg X_B a **belső** tagja. Egy párhalmazt **triviális**nak mondunk, ha belső halmaza üres vagy külső halmaza a V alaphalmaz. Az olyan párhalmazokat, melyekre $X_K = X_B$ azonosíthatjuk a V részhalmazaival. Azt mondjuk, hogy egy $e = uv$ irányított él **fedi** vagy **lefogja** az X párhalmazt vagy hogy **belép** X-be, ha e belép X mindkét tagjába. Egy $D = (V, A)$ digráfban $\varrho(X) = \varrho_D(X)$ jelöli az X párhalmazba belépő élek számát.

Jelölje a párhalmazok halmazát $\mathcal{P}_2$. Ezen a természetes módon bevezethetünk egy részbenrendezést, amelyben $X \le Y$, ha $X_B \subseteq Y_B$ és $X_K \subseteq Y_K$. Az X és Y párhalmazok metszete legyen $(X_K \cap Y_K, X_B \cap Y_B)$ uniója pedig $(X_K \cup Y_K, X_B \cup Y_B)$. Azt mondjuk, hogy az X és Y párhalmaz **keresztező**, ha nem összehasonlíthatók, továbbá $X_B \cap Y_B \neq \emptyset$ és $X_K \cup Y_K \neq V$. A párhalmazok egy $\mathcal{L}$ részhalmazáról azt mondjuk, hogy **keresztező**, ha $\mathcal{L}$ bármely két keresztező tagjával együtt azok metszete és uniója is $\mathcal{L}$-ben van. A $\mathcal{P}_2$ két tagját nevezzük **független**nek, ha a belső halmazaik diszjunktak vagy a külső halmazaik uniója V. Ami azzal ekvivalens, hogy nem fedhetők le egyetlen irányított éllel. A $\mathcal{P}_2$ két tagjának a viszonya tehát háromféle lehet: összehasonlíthatók, keresztezők, függetlenek.

Megjegyzendő, hogy ha $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}_2$ egy nemtriviális párhalmazokból álló lánc (azaz teljesen rendezett részhalmaza $\mathcal{P}_2$-nek), akkor $\mathcal{C}$ tagjai egyetlen éllel lefedhetők, nevezetesen minden olyan uv él jó lesz, amelyre v a $\mathcal{C}$ legszűkebb tagjának belső halmazában van, míg u a $\mathcal{C}$ legbővebb tagjának külső halmazán kívül.

TÉTEL 4.3.1 *Legyen $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{P}_2$ nemtriviális párhalmazok egy keresztező rendszere. Az $\mathcal{L}$-t lefogó élek minimális $\tau = \tau(\mathcal{L})$ száma egyenlő az $\mathcal{L}$-ből függetlenül kiválasztható párhalmazok maximális $\nu = \nu(\mathcal{L})$ számával.*

Biz. Mivel két független halmazpárt egy éllel nem lehet lefogni, ezért a $\nu \le \tau$ egyenlőtlenség kézenfekvő és csak a fordított irány bizonyításával foglalkozunk.

Figyeljük meg, hogy bármely e élre az $\mathcal{L}$ azon tagjaiból álló $\mathcal{L}_e$ rendszer, amelyeket e nem fog le, keresztező.

Állítás 4.3.1 *Ha $\mathcal{L}$ nem üres, akkor létezik olyan $e \in A^*$ él, amelyre $\nu(\mathcal{L}_e) < \nu(\mathcal{L})$.*

Biz. Legyen $m := |A^*|$. Tegyük fel indirekt, hogy minden $e \in A^*$ élre $\nu(\mathcal{L}_e) = \nu(\mathcal{L})$. Másszóval minden e élre létezik olyan $\mathcal{I}_e \subseteq \mathcal{L}$ független család, amelyre $|\mathcal{I}_e| = \nu(\mathcal{L})$ és e nem fedi $\mathcal{I}_e$ egyik tagját sem. Legyen ezek egyesítése $\mathcal{J}'$, úgy értve, hogy egy $X \in \mathcal{L}$ tag annyi példányban fordul elő $\mathcal{J}'$-ben, ahány darab $\mathcal{I}_e$-ben benne van ($e \in A^*$). Ekkor $|\mathcal{J}'| = m\nu(\mathcal{L})$ és

$$\text{minden él legfeljebb } m-1 \text{ tagba lép be.} \tag{4.13}$$

Alkalmazzuk $\mathcal{J}'$-re a kikeresztezési eljárást: amíg csak lehet, vegyünk két keresztező tagot, és helyettesítsük őket a metszetükkel és az uniójukkal. Egy ilyen cserénél (4.13) fennmarad és továbbra is az $\mathcal{L}$ (nem feltétlenül különböző) tagjaiból álló halmazok egy rendszerét kapjuk. Mivel egy kikeresztezési lépésnél a belső és a kplső halmazok elemszámának négyzetösszege nő, véges sok kikeresztezési lépés után egy olyan keresztezés-mentes $\mathcal{J}$ rendszert kapunk, amely az $\mathcal{L}$-nek $m\nu$ (nem feltétlenül különböző) tagját tartalmazza, és amelyre (4.13) fennáll. Minden $X \in \mathcal{J}$-re jelölje $s(X)$ azt a számot, ahányszor X előfordul $\mathcal{J}$-ben. Ezen s-értékek összege $|\mathcal{J}| = m\nu$. Állítjuk, hogy a $\mathcal{J}$-n definiált részbenrendezésben minden lánc s-súlya legfeljebb $m-1$. Valóban, ha volna legalább m súlyú lánc, akkor $\mathcal{J}$-ben volna m tag melyek páronként összehasonlíthatók, és mivel ezek egy lánc tagjai (esetleg több példányban), így, amint láttuk, van olyan él, amely mind az m tagot lefogja, ellentétben a (4.13) tulajdonsággal.

A poláris Dilworth tétel súlyozott változata szerint (:*maximális súlyú lánc súlya egyenlő a súlyokat fedő antiláncok minimális számával*) $\mathcal{J}$ felbontható legfeljebb $m-1$ antiláncra. Miután $\mathcal{J}$ össz-súlya $m\nu$, az egyik antilánc bizonyosan legalább $\nu+1$ tagból áll. De ezen tagok páronként függetlenek, ami ellentmond a $\nu = \nu(\mathcal{L})$ definíciójának, bizonyítván a lemmát. •

A tétel nemtriviális $\nu \ge \tau$ irányának igazolásához ν szerinti indukciót használunk. Ha e szám nulla, akkor $\mathcal{L}$ üres, és így $\tau = 0$. Tegyük fel, $\nu > 0$. A fenti állítás szerint van olyan e él, amelyre $\nu(\mathcal{L}_e) < \nu$. Az indukciós feltevést $\nu(\mathcal{L}_e)$-re felhasználva nyerjük, hogy $\tau(\mathcal{L}) \le \tau(\mathcal{L}_e) + 1 = \nu(\mathcal{L}_e) + 1 \le \nu(\mathcal{L})$, amiből a kívánt $\tau(\mathcal{L}) \le \nu(\mathcal{L})$ egyenlőtlenség adódik. • •

Néha kényelmesebb a 4.3.1 tételt ekvivalens alakban megfogalmazni. Jelölje $\mathcal{D}_2$ az olyan $X = \{X_T, X_F\}$ halmazpárok rendszerét, melyekre X_T, X_F diszjunkt nemüres halmazok. A pár első tagját X **töv**ének, második tagját X **fej**ének nevezzük. $\mathcal{D}_2$ és $\mathcal{P}_2$ tagjai között egy-egy értelmű kapcsolatot teremt az a művelet, amely a pár első tagját a komplementerével helyettesíti. Ekkor belső halmaz fejnek felel meg, külső halmaz pedig egy tő komplementerének. Ezt követve azt mondjuk, hogy $\mathcal{D}_2$ két tagja **független**, ha töveik vagy fejeik diszjunktak. Egy él **fedi** X-t, ha a tövéből a fejébe vezet.

TÉTEL 4.3.2 *Legyen $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{D}_2$ olyan, hogy*

$$\textit{nem független } X, X' \in \mathcal{K} \textit{ esetén } (X_T \cap X'_T, X_F \cup X'_F) \in \mathcal{K} \textit{ és } (X_T \cup X'_T, X_F \cap X'_F) \in \mathcal{K}. \tag{4.14}$$

Ekkor a $\mathcal{K}$ tagjait fedő irányított élek minimális száma egyenlő a $\mathcal{K}$ független tagjainak maximális számával. •

4.3.1 Alakzatok minimális fedése téglalapokkal: Győri tétele

Alkalmazásként levezetjük Győri Ervin tételét. Legyen $P = (v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, e_n, v_n)$ egyszerű irányított út, ahol az e_i irányított él töve v_{i-1} és feje v_i. Jelöljük a P csúcsainak halmazát V-vel. Legyen $\mathcal{U} := \{U_1, \ldots, U_k\}$ a P részútjainak egy rendszere. A következőkben úton általában az út élhalmazát értjük.

Azt mondjuk, hogy P részútjainak egy $\mathcal{B}$ rendszere **generálja** $\mathcal{U}$-t vagy hogy $\mathcal{B}$ **generátora** $\mathcal{U}$-nak, ha $\mathcal{U}$ minden tagja előáll néhány $\mathcal{B}$-beli út egyesítéseként. Például $\mathcal{U}$ saját magának generátora, és az egyelemű utakból álló $\{e_1, \ldots, e_n\}$ rendszer is generálja $\mathcal{U}$-t. Jelölje $\gamma(\mathcal{U})$ az $\mathcal{U}$ generátorainak minimális elemszámát.

Azt mondjuk, hogy egy U útból és annak egy e éléből álló (U, e) pár **reprezentált ut**at alkot. Jelölje $(U, e)^-$ az U azon pontjainak halmazát, melyek megelőzik e-t, míg $(U, e)^+$ azokét, melyek követik. ($(U, e)^-$ és $(U, e)^+$ tehát partícionálja az U ponthalmazát.) Azt mondjuk, hogy a $((U, e)^-, (U, e)^+)$ halmazpár az (U, e) reprezentált úthoz tartozik. Jelölje $\mathcal{U}_r$ az olyan (U, e) reprezentált utak halmazát, amelyekre $U \in \mathcal{U}$.

Legyen $\mathcal{I} := \{I_1, \ldots, I_t\}$ a P részútjainak egy családja és legyen $\mathcal{R} := \{f_1, f_2, \ldots, f_t\}$ egy reprezentáló rendszer, azaz az f_i irányított élek különböző elemei P-nek és $f_i \in I_i$ minden $i = 1, \ldots, t$-re. Azt mondjuk, hogy $\mathcal{R}$ **erős reprezentáló rendszer**, ha $I_i \cap I_j$ nem tartalmazza f_i és f_j mindegyikét $(1 \leq i < j \leq t)$. Ebben az esetben a reprezentált utak $\{(I_1, f_1), (I_2, f_2), \ldots, (I_t, f_t)\}$ családját **független**nek nevezzük. Az $\mathcal{I} := \{I_1, \ldots, I_t\}$ **erősen reprezentálható**, ha létezik erős reprezentáns rendszere.

Jelölje $\sigma(\mathcal{U})$ az $\mathcal{U}$-ban lévő erősen reprezentálható utak maximális számát. Könnyen látható, hogy ha $\mathcal{R}$ erősen reprezentálható útrendszer, akkor $\mathcal{R}$-t nem lehet $|\mathcal{R}|$-nél kevesebb úttal generálni. Ebből következik, hogy $\sigma(\mathcal{U}) \leq \gamma(\mathcal{U})$. Győri tétele azt állítja, hogy itt valójában egyenlőség szerepel:

TÉTEL 4.3.3 (Győri) *A P út részútjainak bármely $\mathcal{U}$ családjára fennáll $\sigma(\mathcal{U}) = \gamma(\mathcal{U})$.*

Biz. A nem-triviális $\sigma \geq \gamma$ egyenlőtlenséget igazoljuk. Az $\mathcal{U}_r$ egy (U, f) tagját **lényeges**nek mondjuk, ha nincs olyan U' $(\neq U)$ tagja $\mathcal{U}$-nak, amelyre $f \in U' \subset U$. Jelölje $\mathcal{L}_\mathcal{U}$ a lényeges reprezentált utakhoz rendelt halmazpárok rendszerét.

Lemma 4.3.4 *$\mathcal{L}_\mathcal{U}$ kielégíti* (4.14)*-t.*

Biz. Legyen (U, f) és (U', f') két lényeges tagja $\mathcal{U}_r$-nek, melyekre $X = ((U, f)^-, (U, f)^+)$ és $X' = ((U', f')^-, (U', f')^+)$ nem független tagja $\mathcal{L}_\mathcal{U}$-nak.

Feltehető, hogy $(U, f)^-$ és $(U', f')^-$ nem összehasonlítható, mert ha mondjuk $(U, f)^- \subseteq (U', f')^-$, akkor $(U, f)^+ \supseteq (U', f')^+$, hiszen X és X' nem függetlenek és (U', f') lényeges. Ekkor viszont $(U, f)^- \cap (U', f')^- = (U, f)^-$ és $(U, f)^+ \cup (U', f')^+ = (U, f)^+$ így (4.14) fennáll. Analóg módon feltehető, hogy $(U, f)^+$ és $(U', f')^+$ sem összehasonlítható.

Következik, hogy $((U, f)^- \cup (U', f')^-, (U, f)^+) \cap (U', f')^+)$ az a pár, amit az (U', f) reprezentált útnak feleltettünk meg, és $((U, f)^-) \cap (U', f')^-, (U, f)^+) \cup (U', f')^+)$ az a pár, amit az (U, f') reprezentált útnak feleltettünk meg. Így csak azt kell kimutatnunk, hogy az (U', f) és (U, f') reprezentált utak lényegesek. Ezt csak (U, f')-re tesszük meg, mert a bizonyítás (U', f) esetében hasonló. Ha indirekt létezne $\mathcal{U}$-nak olyan Z tagja, amelyre $f' \in Z \subset U$, akkor $f \notin Z$ hiszen (U, f) lényeges. De ekkor $Z \subset U'$, ellentmondásban azzal, hogy (U', f') lényeges. •

Világos, hogy $\mathcal{L}_\mathcal{U}$-nak egy független rész-családja megfelel az $\mathcal{U}$ egy erősen reprezentálható rész-családjának. Legyen továbbá $C := \{c_1, \ldots, c_t\}$ az $\mathcal{L}_\mathcal{U}$ fedése, ahol $c_1, \ldots, c_t$ irányított élek a V alaphalmazon. Legyen B_i a P-nek olyan részútja, melynek első pontja a c_i töve, az utolsó pontja a c_i feje. Legyen $\mathcal{B} := \{B_1, \ldots, B_t\}$.

Azt állítjuk, hogy $\mathcal{B}$ generálja $\mathcal{U}$-t. Ha nem így lenne, akkor létezne $\mathcal{U}$-nak olyan minimális U tagja, amely nem áll elő $\mathcal{B}$-beli utak egyesítéseként. Ekkor U-nak van olyan f éle, amelyre

$$\mathcal{B}\text{-nek semmilyen } B \text{ tagjára sem } f \in B \subseteq U. \qquad (*)$$

Miután C fedi a lényeges pároknak megfeleltetett halmaz-párokat, (U, f) nem lehet lényeges. Vagyis létezik olyan U' az $\mathcal{U}$-ban, amelyre $f \in U' \subset U$. Az U minimális választása miatt, U' előáll $\mathcal{B}$-beli halmazok egyesítéseként, ellentmondásban a $(*)$ tulajdonsággal.

Most Győri tétele rögtön következik a 4.3.2 tételből. • •

Megjegyzés Győri tétele és a fenti bizonyítás változtatás nélkül kiterjeszthető arra az általánosabb esetre, amikor egy irányított út helyett, egy irányított kör adott részútrendszerét akarjuk generálni. Egy másik irányú kézenfekvően kínálkozó általánosításra azonban, amikor egy fenyő részútrendszeréről van szó, Győri tétele már nem érvényes.

Bemutatjuk Győri tételének egy érdekes kombinatorikus geometriai következményét. Legyen T egy derékszögű poligon, azaz T a síknak vízszintes és függőleges szakaszokkal határolt (összefüggő, zárt) tartománya. T-t le akarjuk fedni T-be eső (zárt) téglalapokkal. Az alábbiakban téglalapon mindig olyan téglalapot értünk, melyek oldalai vízszintesek vagy függőlegesek. A szükséges téglalapok száma nyilván legalább akkora, mint T páronként "független" pontjainak maximális száma, ahol két pontot akkor nevezünk függetlennek, ha nem fedhetők le T-hez tartozó téglalappal (azaz a két pont által meghatározott legszűkebb téglalap kilóg T-ből). Létezik olyan példa, ahol ezen maximumnál több téglalapra van szükség a fedéshez. Ennek fényében értékes, hogy függőlegesen konvex alakzatokra ilyen ellenpélda már nem létezik, magyarán a min-max tétel ilyenkor már fennáll. A T tartományt akkor nevezzük **függőlegesen konvex**nek, ha T-nek és bármely függőleges egyenesnek a metszete szakasz.

TÉTEL 4.3.5 (Győri) *Legyen T függőlegesen konvex derékszögű poligon. A T-t fedő téglalapok minimális száma egyenlő T páronként független pontjainak maximális számával.*

Biz. Feltehető, hogy a határoló szakaszok függőleges illetve vízszintes koordinátái egészek, továbbá, hogy a bal szélső határoló szakasz koordinátája 0, a jobb szélsőé pedig n. Legyen $\{v_0, \ldots, v_n\}$ egy v_0-ból v_n-be vezető P irányított út ponthalmaza.

Nevezzünk egy T-be eső téglalapot **elemi**nek, ha magassága egységnyi, határoló oldalai egész koordinátájúak és vízszintes irányban maximális (azaz T valamely baloldali határoló oldalától egy jobboldali határoló oldaláig terjed.) Az elemi téglalapok lefedik T-t és két elemi téglalapnak csak vízszintes oldalaikon lehetnek közös pontjai. Minden Z elemi téglalaphoz rendeljük hozzá a P-nek egy v_i-ből v_j-be vezető P_Z részútját, ahol i illetve j a Z baloldali illetve jobboldali határoló koordinátája, és jelölje $\mathcal{F}$ a kapott részút rendszert. Legyen $y(P_Z)$ a Z alsó vízszintes határoló szakaszának koordinátája plusz 1/2.

Tekintsük a $\mathcal{P}$ egy maximális erősen reprezentált rendszerét: $\{(I_1, f_1), (I_2, f_2), \ldots, (I_t, f_t)\}$, ahol $t = \sigma(\mathcal{F})$. Legyen $y_i := y(I_i)$ és x_i az f_i él tövének x-koordinátája plusz . A konstrukció miatt az (x_i, y_i) pontok $(i = 1, \ldots, t)$ mind T-ben vannak. Állítjuk, hogy páronként függetlenek. Valóban, ha (x_i, y_i) és (x_j, y_j) nem volna független, akkor az őket tartalmazó legszűkebb téglalap T-hez tartozna, de ez ellentmondásban van az erős reprezentáns rendszer definíciójával. Azt kaptuk tehát, hogy a T-ből kiválasztható független pontok maximális száma legalább $\sigma(\mathcal{F})$.

Legyen $\mathcal{B}$ az $\mathcal{F}$-nek minimális generáló rendszere, amely tehát P-nek $\gamma(\mathcal{F})$ darab részútjából áll. Mindegyik $B \in \mathcal{B}$ úthoz egyértelműen hozzátartozik egy T-ben fekvő függőleges irányban maximális téglalap, amelynek "vízszintes vetülete" éppen a B út. Állítjuk, hogy az így kapott $\gamma(\mathcal{F})$ darab téglalap lefedi T-t. Valóban, T tetszőleges (x, y) pontja benne van valamelyik Z elemi téglalapban. Az ehhez tartozó $\mathcal{P}$-beli P_Z út előáll $\mathcal{B}$-beli utak egyesítéseként. Tehát $\mathcal{B}$-nek van olyan B tagja, amely P_Z-ben van és tartalmazza a $v_{\lfloor x \rfloor} v_{\lceil x \rceil}$ élt. A T függőleges konvexitásából következően a B-hez rendelt téglalap tartalmazza az (x, y) pontot.

A 4.3.3 tételből adódóan $\sigma = \gamma$, amiből a 4.3.5 tétel következik. •

Egy korábbi megjegyzés nyomán megállapíthatjuk, hogy az előbbi tétel akkor is évényben marad, ha egy hengerre rajzolt függőlegesen konvex derékszögű alakzatra alkalmazzuk.

2013. május 14.file: parhal05

4.4 Keresztező szupermoduláris függvények fedése

Legyen p nemnegatív, egészértékű, pozitívan keresztező szupermoduláris függvény $\mathcal{P}_2$-n, amelyről feltesszük, hogy minden triviális párhalmazon az értéke 0. Jelölje $D = (V, A^*)$ a teljes irányított gráfot (amelyben tehát minden uv él benne van, és így D-nek $m := |V|(|V| - 1)$ éle van). Azt mondjuk, hogy egy $z : A^* \to \mathbf{Z}_+$ egészértékű függény **lefogja** vagy **fedi** p-t, ha $\varrho_z(X_K, X_B) \geq p(X_K, X_B)$, vagy röviden

$$\varrho_z(X) \geq p(X) \text{ fennáll minden } X = (X_K, X_B) \in \mathcal{P}_2 \text{ párra.}$$

Mivel p értéke triviális párhalmazokon 0 így p-nek mindig létezik lefogása.

A $\sum[p(X) : X \in \mathcal{F}]$ összegről azt mondjuk, hogy az $\mathcal{F}$ p-összege és röviden $p(\mathcal{F})$-fel jelöljük. Legyen τ_p a p minimális lefogásának értéke, azaz

$$\tau_p := \min\{z(A^*) : z \geq 0 \text{ egészértékű fedése } p\text{-nek}\},$$

és legyen ν_p a $\mathcal{P}_2$ egy független részhalmazának maximális p-összege, azaz

$$\nu_p := \max\{p(\mathcal{F}) : \mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}_2, \mathcal{F} \text{ független}\}.$$

TÉTEL 4.4.1 *Legyen $D = (V, A^*)$ a teljes irányított gráf, p pozitívan keresztező szupermoduláris függvény $\mathcal{P}_2$-n, amely minden triviális párhalmazon 0 értékű. Ekkor $\tau_p = \nu_p$.*

Biz. A könnyű $\nu_p \leq \tau_p$ irány igazolásához legyen z a p-nek fedése és legyen $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}_2$ független. Mivel A^*-nak semmilyen éle sem fedi $\mathcal{F}$-nek egynél több tagját, azt kapjuk, hogy $z(A^*) \geq \sum[\varrho_z(X) : X \in \mathcal{F}] \geq \sum[p(X) : X \in \mathcal{F}] = p(\mathcal{F})$ és innen $\nu_p \leq \tau_p$.

A fordított irányhoz minden $e \in A^*$ élre jelölje p_e azt a függvény, amelyre $p_e(X) := (p_e(X) - 1)^+$, ha e lefogja X-t és $p_e(X) := p(X)$ különben. Miután a ϱ függvény szubmoduláris $\mathcal{P}$-n, p_e pozitívan keresztező szupermoduláris. Mivel $p_e \leq p$, érvényes, hogy $\nu_p - 1 \leq \nu_{p_e} \leq \nu_p$. Azt mondjuk, hogy az e él **csökkentő**, ha $\nu_{p_e} < \nu_p$. A következő lemma a bizonyítás kulcsa.

Lemma 4.4.2 *Ha $\nu_p > 0$, akkor létezik csökkentő él.*

Biz. Tegyük fel indirekt, hogy nincs csökkentő él, azaz $\nu_{p_e} = \nu_p$ minden $e \in A^*$ élre fennáll. Ez azt jelenti, hogy minden e élre létezik olyan $\mathcal{J}_e \subseteq \mathcal{P}_2$ független család, amelyre $p(\mathcal{J}_e) = \nu_p$ és e nem fedi $\mathcal{J}_e$ egyik tagját sem. Legyen ezek egyesítése $\mathcal{J}'$, úgy értve, hogy egy $X \in \mathcal{P}_2$ tag annyi példányban fordul elő $\mathcal{J}'$-ben, ahány darab $\mathcal{I}_e$-ben benne van ($e \in A^*$). Ekkor $p(\mathcal{J}') = m\nu_p$ és

$$\text{minden él legfeljebb } m - 1 \text{ tagba lép be.} \tag{4.15}$$

Feltehető, hogy $\mathcal{J}'$ minden elemének p-értéke pozitív, mert a nulla p-értékű tagok kidobhatók. Amíg csak lehet, alkalmazzuk a kikeresztezési eljárást: ha van két keresztező tagja, akkor dobjuk ki őket, és a metszetüknek és uniójuknak egy-egy példányát vegyük be, de csak azét, amelynek a p-értéke pozitív. Egy ilyen cserénél ϱ szubmodularitása miatt (4.15) fennmarad, és a p szupermodularitása miatt továbbra is egy olyan, a $\mathcal{P}_2$ (nem feltétlenül különböző) tagjaiból álló rendszert kapunk, melynek p-összege legalább $p(\mathcal{J})'$. Könnyen igazolható, hogy csak véges sok kikeresztezési lépés lehet. Jelölje a végül kapott keresztezés-mentes rendszert $\mathcal{J}$. Erre tehát $p(\mathcal{J}) \geq p(\mathcal{J}') = m\nu_p$.

Minden $X \in \mathcal{J}$-re jelölje $s(X)$ azt a számot, ahányszor X előfordul $\mathcal{J}$-ben. Ezen s-értékek összege tehát $|\mathcal{J}|$. Állítjuk, hogy a $\mathcal{J}$-n definiált részbenrendezésben minden lánc s-súlya legfeljebb $m - 1$. Valóban, ha volna legalább m súlyú $\mathcal{C}$ lánc, akkor $\mathcal{J}$-ben volna m (nem feltétlenül különböző) tag, melyek páronként összehasonlíthatók, és mivel ezek egy lánc tagjai (esetleg több példányban), így az ezeket lefogó A^*-beli él, mind az m tagot lefogja, ellentétben a (4.15) tulajdonsággal.

A poláris Dilworth tétel súlyozott változata szerint (:*maximális súlyú lánc súlya egyenlő a súlyokat fedő antiláncok minimális számával*) létezik $\mathcal{J}$-ben $m - 1$ antilánc, melyek minden $X \in \mathcal{J}$-t $s(X)$ példányban tartalmaznak. Miután $p(\mathcal{J}) \geq m\nu_p$, az egyik antilánc p-összege nagyobb, mint ν_p. De $\mathcal{J}$ keresztezés-mentes, így egy antilánc tagjai függetlenek, ellentmondásban ν_p definíciójával. •

A nemtriviális $\nu_p \geq \tau_p$ egyenlőtlenség igazolásához ν_p szerinti indukciót használunk. Ha ez az érték 0, úgy p azonosan 0, és $z := 0$ lefogja p-t, azaz $\tau_p = 0$. Ha $\nu_p > 0$, akkor alkalmazhatjuk az előző lemmát. Ennek alapján létezik egy $e \in A^*$ csökkentő él. A p_e bármely fedését az e élen eggyel megnövelve a p egy fedését kapjuk, amiből $\tau_p \leq \tau_{p_e} + 1$. Az indukció alapján $\tau_{p_e} = \nu_{p_e}$, így $\tau_p - 1 \leq \tau_{p_e} = \nu_{p_e} \leq \nu_p - 1$, és innen $\tau_p \leq \nu_p$, amit bizonyítani akartunk. • •

Megjegyezzük, hogy a 4.4.1 tétel abban a speciális esetben, amikor p $0-1$-értékű, nem más, mint a 4.3.1 tétel.

Érdemes a 4.4.1 tételt az alábbi ekvivalens alakban megfogalmazni. Azt mondjuk, hogy egy **digráf fedi** p-t, ha minden $X \in \mathcal{P}_2$ befoka legalább $p(X)$.

TÉTEL 4.4.3 *Legyen p pozitívan keresztező szupermoduláris függvény $\mathcal{P}_2$-n. Adott γ egészre akkor és csak akkor létezik egy legfeljebb γ élű p-t fedő digráf, ha minden független $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}_2$ p-összege legfeljebb γ.* •

4.4.1 Irányított gráfok összefüggőségének növelése

A 4.4.1 tétel segítségével megválaszoljuk a pont-összefüggőség növelésére vonatkozó általános kérdést. Legyen $D = (V, A)$ egyszerű irányított gráf és tegyük fel, hogy a $k < |V| - 1$. Egy $X = (X_K, X_B)$ nemtriviális párhalmazra legyen

$$\mu(X) := |X_K| - |X_B|. \tag{4.16}$$

Lemma 4.4.4 *A $D^+ = (V, A^+)$ irányított gráf akkor és csak akkor k-összefüggő, ha*

$$\varrho(X) + \mu(X) \geq k \tag{4.17}$$

fennáll minden nemtriviális X párhalmazra.

Biz. Legyen $x \in V - X_K$ és $y \in X_B$. Ha D^+ k-összefüggő, akkor létezik k belsőleg diszjunkt út x-ből y-ba. Ezen utak mindegyike vagy használ egy X-be lépő élt vagy átmegy egy $X_K - X_B$-beli ponton és ezért (4.17) szükséges.

Megfordítva, álljon fenn (4.17) és indirekt tegyük fel, hogy nem létezik k belsőleg diszjunkt út valamely x pontból egy másik y-ba. Amennyiben nincsen él x-ből y-ba, úgy a Menger tétel irányított pont-változata alapján létezik egy $C \subseteq V - \{x, y\}$ részhalmaz, amelynek kevesebb, mint k pontja van, és amely lefogja az összes x-ből y-ba vezető irányított utat. Legyen X_B a $D^+ - C$ digráfban az x-ből nem elérhető pontok halmaza és legyen $X_K := V - (X_B \cup C)$. Ekkor az $X = (X_K, X_B)$ párhalmazra $\varrho(X) = 0$ és $\mu(X) \leq k - 1$, azaz X megsérti (4.17)-t.

Tegyük most fel, hogy létezik az $e = xy$ él. Ekkor a $D^+ - e$ digráfban nincs $k-1$ belsőleg diszjunkt xy-út. A fenti érvelést a $D^+ - e$ digráfra alkalmazva azt kapjuk, hogy létezik olyan $X' = (X'_K, X'_B)$ párhalmaz, amelyre $\mu(X') \leq k - 2$ és e az egyetlen X'-be lépő él D^+-ban, azaz X' megsérti (4.17)-t. •

Definiáljuk az $X = (X_K, X_B)$ párhalmaz hiányát: $p_{hi}(X) = (k - \varrho(X) - \mu(X))^+$. Könnyen látható, hogy p_{hi} pozitívan keresztező. A 4.4.4 lemmából kapjuk, hogy új éleknek egy F halmazát a $D = (V, A)$ digráfhoz adva a keletkező $D^+ := (V, A + F)$ digráf akkor és csak akkor lesz k-összefüggő, ha

$$\varrho_F(X) \geq p_{hi}(X)$$

fennáll minden nemtriviális X párhalmazra. Így a 4.4.3 tételből közvetlenül kiolvasható a következő.

TÉTEL 4.4.5 *A $D = (V, A)$ irányított gráf akkor és csak akkor tehető legfeljebb γ új él hozzáadásával k-összefüggővé, ha*

$$\sum [p_{hi}(X) : X_{\mathcal{F}}] \leq \gamma$$

fennáll minden független nemtriviális párhalmazokból álló $\mathcal{F}$ halmazra. •

Feladat 4.3 *Egy párhalmazt nevezzünk egyirányúnak, ha nem lép bele D-beli él. Igazoljuk, hogy a 4.4.5 tételben elegendő egyirányú párhalmazokra szoritkozni.*

4.5 Halmazfüggvények újra

A 4.1 részben keresztező szupermoduláris halmazfüggvények lefogásával kapcsolatban először egy fokszám-előírt lefogásra vonatkozó tételt (4.1.1) bizonyítottunk, majd ennek felhasználásával a minimális élszámú lefogásról szóló 4.1.2 tételt. Most fordított utat járunk be. Mivel a halmaz párokon értelmezett függvények magukban foglalják a a halmazfüggvényeket, így nem meglepő, hogy a 4.4.1 tételből a 4.1.2 tételt könnyen levezethetőnek bizonyul. Utána pedig megmutatjuk, hogy a 4.1.2 tételből miként kaphatjuk meg a 4.1.1 tételt.

A függetlenség fogalma jobban áttekinthető a 4.4.1 tétel azon speciális esetében, amikor p csak olyan $(X_K, X_B) \in \mathcal{P}_2$ párokon lehet pozitív, amelyekre $X_K = X_B$. Ebben az esetben p azonosítható egy (pozitívan keresztező szupermoduláris) halmazfüggvénnyel. Az egyszerűsítés kulcsa az alábbi megfigyelés.

Állítás 4.5.1 *Legyen $\mathcal{I}$ a V alaphalmaz részhalmazainak egy független rendszere abban az értelemben, hogy $\mathcal{I}$ bármely két tagja vagy diszjunkt vagy ko-diszjunkt (:uniójuk az egész V). Ekkor $\mathcal{I}$ tagjai vagy páronként diszjunktak vagy páronként ko-diszjunktak.*

Biz. Tegyük fel indirekt, hogy $\mathcal{I}$-nek van két tagja, melyek diszjunktak és van két tagja, melyek ko-diszjunktak. Mivel $\mathcal{I}$ bármely két tagja diszjunkt vagy ko-diszjunkt, van olyan $X \in \mathcal{I}$, amely diszjunkt valamely Y-tól és ko-diszjunkt valamely Z-től. De akkor szükségképpen $Y \subseteq Z$, ellentmondásban az $\mathcal{I}$ függetlenségével. •

A 4.4.1 tétel következményeként kapjuk a 4.1.2 tételt.

TÉTEL 4.5.1 *Legyen p pozitívan keresztező szupermoduláris halmazfüggvény V részhalmazain. Adott γ egészre akkor és csak akkor létezik egy legfeljebb γ élű p-t fedő H digráf, ha V minden $\{V_1, \ldots, V_t\}$ partíciójára*

$$\sum_{i=1}^{t} p(V_i) \leq \gamma \tag{4.18}$$

és

$$\sum_{i=1}^{t} p(V - V_i) \leq \gamma. \tag{4.19}$$

H választható hurokmentesnek. •

Megjegyezzük, hogy a p nemnegatívitása folytán a tételben és a későbbiekben is ekvivalens feltételhez jutunk, ha partíciók helyett szubpartíciókról beszélünk.

A 4.5.1 tételt felhasználhatjuk arra, hogy fokszám-előírt fedések létezésére nyerjünk feltételeket. Mostanáig kényelmesnek bizonyult és nem okozott zavart, hogy nem tettünk különbséget egy egyelemű csúcshalmaz és annak egyetlen eleme között. A most következő feladatokban azonban hurokélek használata is időnként megengedett, ezért felhívjuk a figyelmet, hogy egy v csúcsnak a befokán azon élek számát értettük, amelyek feje v-ben van, míg egy egyelemű $\{v\}$ csúcshalmaz befokán azon v fejű élek számát, melyek töve nem v. Vagyis a v csúcs befoka a $\{vv\}$ alakú hurokélek számával nagyobb, mint a $\{v\}$ halmaz befoka.

TÉTEL 4.5.2 *Legyen p pozitívan keresztező szupermoduláris halmazfüggvény V részhalmazain. Legyen $m_{ki} : V \to \mathbf{Z}_+$ és $m_{be} : V \to \mathbf{Z}_+$ a pontok ki- és befokaira vonatkozó előírás, melyekre $\gamma := m_{be}(V) = m_{ki}(V)$. Akkor és csak akkor létezik olyan $H = (V, F)$ irányított gráf, amely fedi p-t és amelyben*

$$\delta_H(v) = m_{ki}(v) \text{ és } \varrho_H(v) = m_{be}(v) \tag{4.20}$$

minden csúcsra fennáll, ha minden $X \subseteq V$-re

$$p(V - X) \leq m_{ki}(X) \tag{4.21}$$

és

$$p(X) \leq m_{be}(X) \tag{4.22}$$

fennáll. Amennyiben H hurokmentességét is előírjuk, úgy a fenti feltételeken túl még azt is meg kell követelni, hogy minden v csúcsra

$$m_{be}(v) + m_{ki}(v) \leq \gamma. \tag{4.23}$$

Biz. Tegyük fel, létezik p-t fedő és (4.20)-t kielégítő $H = (V, F)$ digráf. Ekkor bármely $X \subseteq V$ részhalmazra $p(X) \leq \varrho_H(X) \leq \sum_{v \in X} \varrho_H(v) = m_{be}(X)$ és $p(V - X) \leq \varrho_H(V - X) = \delta_H(X) \leq \sum_{v \in X} \delta_H(v) = m_{ki}(X)$, azaz a (4.21) és (4.22) feltételek szükségesek. Ha rádásul H hurokmentes, akkor tetszőleges v pontra a v fejű és v tövű élek különbözőek, így ezek össz-száma legfeljebb γ, vagyis (4.23) is szükséges.

Az elegendőség igazolásához tegyük fel, hogy (4.21) és (4.22) fennáll, de (4.23) nem feltétlenül. Tételezzük fel először, hogy van olyan v csúcs, amelyre $m_{be}(v) + m_{ki}(v) > \gamma$. Állítjuk, hogy ekkor nincs olyan v-t tartalmazó Y halmaz, amelyre $p(Y) = m_{be}(Y)$. Ekkor ugyanis $p(Y) = m_{be}(Y) \geq m_{be}(v) > \gamma - m_{ki}(v) = m_{ki}(V - v) \geq m_{ki}(V - Y)$ állna, ellentmondásban a (4.21) feltétellel. Analóg módon látható, hogy nincs olyan v-t tartalmazó Y halmaz, amelyre $p(V - Y) = m_{ki}(Y)$. Ezek miatt, ha mind $m_{be}(v)$, mind $m_{ki}(v)$ értékét csökkentjük eggyel, akkor a módosított m'_{be}, m'_{ki} előírásokra a (4.21) és (4.22) feltételek érvényben maradnak, így indukcióval létezik p-t fedő H' digráf, amely m'-re nézve kielégíti (4.20)-t. A vv hurokélt H'-höz hozzátéve a keletkező H továbbra is fedi p-t és kielégíti (4.20)-t.

Mostantól tehát feltehetjük, hogy (4.23) minden v csúcsra fennáll. Figyeljük meg, hogy ha a (4.21)-t illetve (4.22)-t alkalmazzuk az $X = \{v\}$ halmazra, akkor $p(v) \leq m_{be}(v)$ és $p(V - v) \leq m_{ki}(v)$ adódik. Minden v csúcsra emeljük $p(v)$ értékét $m_{be}(v)$-re és $p(V - v)$ értékét $m_{ki}(v)$-re. A keletkező p' halmazfüggvény is pozitívan keresztező szupermoduláris lesz.

Állítjuk, hogy p' teljesíti (4.18)-t. Valóban, tekintsük V-nek egy $\mathcal{P} := \{V_1, \ldots, V_l, \{v_1\}, \ldots, \{v_h\}\}$ partícióját, ahol a V_i halmazok legalább két eleműek. Legyen $V_0 := \{v_1, \ldots, v_h\}$. (Itt $h = 0$ vagy $l = 0$ is lehetséges.) Amennyiben $h = l = 1$ (azaz $V_1 = V - v_1$) és $p'(V_1) = m_{ki}(v_1), p'(v_1) = m_{be}(v_1)$, úgy ezen kétrészes partícióra (4.23) és (4.18) ekvivalensek. A további esetekben (4.22)-t kihasználva kapjuk, hogy $p'(\mathcal{P}) =$

$\sum_{i=1}^{l} p(V_i) + \sum_{j=1}^{l} p'(v_j) \leq \sum_{i=1}^{l} m_{be}(V_i) + m_{be}(V_0) = m_{be}(V) = \gamma$ adódik, és így p' valóban teljesíti (4.18)-t. Analóg módon adódik, hogy p' teljesíti (4.19)-t is.

Így a 4.5.1 tétel alapján létezik p-t fedő legfeljebb γ élű hurokmentes H digráf, amelyre $\gamma \geq \sum \varrho_H(v) \geq \sum m_{be}(v) = \gamma$ és $\gamma \geq \sum \delta_H(v) \geq \sum m_{ki}(v) = \gamma$, és emiatt $\varrho_H(v) = m_{be}(v)$ és $\delta_H(v) = m_{ki}(v)$ teljesül minden v csúcsra. •

4.5.1 ST-keresztezés

Megmutatjuk, hogy a 4.4.1 tétel maga is megfogalmazható halmazfüggvények nyelvén, bár erre a fentebb leírt egyszerűbb alakok már nem vihetők át.

Legyen a V alaphalmaznak S és T két nemüres (nem feltételenül diszjunkt) részhalmaza V. Egy élre azt mondjuk, hogy ST-**él**, ha a töve S-ben a feje pedig T-ben van. Az X és Y részhalmaz ST-**keresztező**, ha az $X \cap Y \cap T, S - (X \cap Y), X - Y, Y - X$ halmazok egyike sem üres. Amennyiben $S = T = V$, úgy ez egybeesik a keresztezés megszokott fogalmával. V részhalmazainak egy $\mathcal{F}$ családja ST-**keresztező**, ha bármely két ST-keresztező tagjára azok metszete és uniója is $\mathcal{F}$-ben van.

Halmazok egy $\mathcal{I}$ családja ST-**független** vagy ST-**keresztezés-mentes**, ha bármely két X, Y tagjára az $X \cap Y \cap T$ és $S - (X \cup Y)$ halmazok közül legalább az egyik üres. Ez azzal ekvivalens, hogy nem létezik ST-él, amely mind X-be, mind Y-ba belép.

Egy $p : 2^V \to \mathbf{Z}_+$ halmazfüggvény **pozitívan** ST-**keresztező szupermoduláris**, ha bármely két ST-keresztező halmazra, melyek p-értéke pozitív, teljesül a szupermodularitási egyenlőtlenség.

TÉTEL 4.5.3 *Tegyük fel, hogy egy* **pozitívan** ST-**keresztező** *szupermoduláris p halmazfüggvény csak olyan X halmazokon pozitív, melyekre $T \cap X \neq \emptyset, S - X \neq \emptyset$. Ekkor a p-t fedő irányított ST-élek minimális száma egyenlő az ST-független halmazok maximális p-összegével.*

Biz. Az $S \cup T$ halmazon részhalmazain definiáljuk p_1-t a következőképp. $p_1(Y) := \max\{p(Y \cup X : X \subseteq V - (S \cup T)\}$. Könnyen ellenőrizhető, hogy p_1 is pozítivan ST-keresztező szupermoduláris és egy ST-élekből álló digráf pontosan akkor fedi p-t, ha fedi p_1-t.

Legyen S' és T' az S és T halmazok egy-egy példánya, melyek diszjunktak és legyen $V' := S' \cup T'$. Tetszőleges $X \subseteq V$ halmazra legyen $p'(X'_K, X'_B) := p_1(X)$, ahol X'_B a T' azon pontjaiból áll, amelyekre a nekik megfelelő T-beli pontok X-ben vannak, X'_K pedig az X'_B elemeiből valamint azon S'-beli pontokból áll, amelyekre a nekik megfelelő S-beli pontok X-ben vannak. Könnyen ellenőrizhető, hogy p' pozitívan keresztező szupermoduláris függvény és a tétel következik a 4.4.1 tételből. •

Gyakorlat 4.4 *Igazoljuk, hogy a* 4.4.1 *tétel analóg konstrukcióval következik a* 4.5.3 *tételből.*

file: parszup5, 2013. május 14.

4.6 Absztrakt irányítatlan leemelés

Legyen $p \geq 0$ egészértékű, halmazfüggvény a V alaphalmazon, amelyre teljesül, hogy $p(\emptyset) = 0$ és V bármely három páronként keresztező részhalmaza között, melyek mindegyikén p pozitív, van kettő, melyekre teljesül a

$$p(X) + p(Y) \leq p(X \cup Y) + p(X \cap Y) \tag{4.24}$$

$$p(X) + p(Y) \leq p(X - Y) + p(Y - X) \tag{4.25}$$

egyenlőtlenségek közül legalább az egyik. Ilyenkor azt mondjuk, hogy p **gyengén ferde szupermoduláris**. Amennyiben (4.24) vagy (4.25) egyike mindannyiszor fennáll, amikor X, Y keresztező és $p(X), p(Y)$ pozitív, akkor **pozitívan ferde szupermoduláris** függvényről beszélünk. Könnyen látszik, hogy két pozitívan ferde szupermoduláris függvény maximuma gyengén ferde szupermoduláris. Feltesszük, hogy p szimmetrikus, azaz $p(X) = p(V - X)$ minden $X \subseteq V$-re. A következő tétel gyengén ferde szupermoduláris függvényekről szól. Az olvasó elsőre joggal érezheti úgy, hogy ez a fogalom kissé mesterkélt. De egyrészt az alábbi tétel bizonyítása pont erre a fogalomra működik jól, másrészt alkalmazásokban is éppen erre lesz szükségünk.

TÉTEL 4.6.1 *Legyen p gyengén ferde szupermoduláris és szimmetrikus. Legyen $m : V \to \mathbf{Z}_+$ nemnegatív egészértékű függvény, amelyre $\widetilde{m}(V)$ páros. Tegyük fel továbbá, hogy $\widetilde{m}(X) + p(X)$ páros minden olyan X halmazra, amelyre $p(X) > 0$. Akkor és csak akkor létezik olyan G irányítatlan gráf, amelyre*

$$d_G(X) \geq p(X) \text{ minden } X \subseteq V \text{ -re} \tag{4.26}$$

és

$$d_G(v) = m(v) \text{ minden } v \in V \text{ -re,} \tag{4.27}$$

ha

$$\widetilde{m}(X) \geq p(X) \text{ minden } X \subseteq V \text{ -re.} \tag{4.28}$$

Biz. Ha létezik a kívánt G gráf, akkor $p(X) \leq d_G(X) = \sum(d_G(v) : v \in X) - 2i_G(X) = \widetilde{m}(X) - 2i_G(X) \leq \widetilde{m}(X)$, azaz (4.28) valóban szükséges.

Az elegendőséghez $\widetilde{m}(V)$ szerinti indukciót használunk. Ha $\widetilde{m}(V) = 0$, azaz $m \equiv 0$, akkor az üres gráf jó megoldás lesz. Legyen tehát $\widetilde{m}(V) > 0$ és t egy olyan csúcs, amelyre $m(t) > 0$. Egy X halmazt **pontos**nak nevezünk, ha $\widetilde{m}(X) = p(X)$. Amennyiben $\widetilde{m}(V - t) = 0$, akkor minden t-t nem tartalmazó X halmazra $p(X) = 0$ és így p szimmetriája miatt $p \equiv 0$. Ekkor a t-re illeszkedő $m(t)/2$ hurokból álló G gráf jó lesz. Tehát $\widetilde{m}(V - t) > 0$.

Lemma 4.6.2 *Létezik olyan $u \in V - t$ pont, amelyre $m(u) > 0$ és az u nincs benne t-t tartalmazó pontos halmazban.*

Biz. Tegyük fel, hogy a lemma nem igaz, és tekintsünk t-t tartalmazó maximális pontos halmazoknak egy minimális $P_1, \ldots, P_\ell$ rendszerét, melyek minden pozitív $m(v)$ értékű v pontot tartalmaznak. Nem lehet, hogy $\ell = 1$, mert akkor $\widetilde{m}(V - P_1) = 0$, és így $0 < \widetilde{m}(P_1) = p(P_1) = p(V - P_1) \leq \widetilde{m}(V - P_1) = 0$ adódna. Az sem lehet, hogy $\ell = 2$, mert akkor $p(P_1) + p(P_2) = p(V - P_1) + p(V - P_2) \leq \widetilde{m}(V - P_1) + \widetilde{m}(V - P_2) = \widetilde{m}(P_1) + \widetilde{m}(P_2) - \widetilde{m}(P_1 \cap P_2) < \widetilde{m}(P_1) + \widetilde{m}(P_2) = p(P_1) + p(P_2)$ adódna.

Így $\ell \geq 3$, és a P_i halmazok mindegyikének van olyan pontja, amely a többi P_i halmazban nincs benne. Ezért a P_i halmazok páronként keresztezőek, így a gyengén ferde szupermodularitás miatt van közöttük kettő, mondjuk X és Y, melyekre (4.24) vagy (4.25) teljesül. Nem lehet, hogy $p(X)+p(Y) \leq p(X-Y)+p(Y-X)$, mert akkor $m(t) > 0$ és $t \in X \cap Y$ miatt $\widetilde{m}(X) + \widetilde{m}(Y) = p(X) + p(Y) \leq p(X - Y) + p(Y - X) \leq \widetilde{m}(X - Y) + \widetilde{m}(Y - X) = \widetilde{m}(X) + \widetilde{m}(Y) - 2\widetilde{m}(X \cup Y) < \widetilde{m}(X) + \widetilde{m}(Y)$, ami lehetetlen. Így $\widetilde{m}(X) + \widetilde{m}(Y) = p(X) + p(Y) \leq p(X \cap Y) + p(X \cup Y) \leq \widetilde{m}(X \cap Y) + \widetilde{m}(X \cup Y) = \widetilde{m}(X) + \widetilde{m}(Y)$, és ezért végig egyenlőség áll, amiből $p(X \cup Y) = \widetilde{m}(X \cup Y)$ következik, ellentmondásban a feltevéssel, hogy X és Y maximális pontos halmazok. •

Jelölje $m' : V \to \mathbf{Z}_+$ azt a függvényt, amely m-ből keletkezik az $m(t)$ és az $m(u)$ értékek eggyel történő csökkentésével. Legyen $p'(X) := (p(X) - 1)^+$, ha $X \cap \{t, u\} = 1$ és $p'(X) := p(X)$ egyébként. Könnyen látszik, hogy p' gyengén ferde szupermoduláris, szimmetrikus, továbbá $p'(X) > 0$ esetén $\widetilde{m}'(X) + p'(X)$ páros. Állítjuk, hogy $\widetilde{m}'(X) \geq p'(X)$ teljesül minden $X \subseteq V$. Ez nyilván teljesül, ha $p'(X) = 0$, így feltehetjük, hogy $p'(X) > 0$. Ha X elválasztja u-t és t-t, akkor $\widetilde{m}'(X) = \widetilde{m}(X) - 1 \geq p(X) - 1 = p'(X)$. Ha $X \cap \{u, t\} = \emptyset$, akkor $\widetilde{m}'(X) = \widetilde{m}(X) \geq p(X) = p'(X)$. Végül, ha $\{u, t\} \subseteq X$, akkor u választása miatt X nem pontos, így $\widetilde{m}(X) \geq p(X) + 1$, sőt a paritási feltevés miatt $\widetilde{m}(X) \geq p(X) + 2$ és így $\widetilde{m}'(X) = \widetilde{m}(X) - 2 \geq p(X) = p'(X)$.

Alkalmazhatjuk tehát az indukciós feltevést m' és p'-re, és így létezik olyan G' gráf, amelyre $d_{G'}(X) \geq p'(X)$ minden $X \subseteq V$ -re és $d_{G'}(v) = m'(v)$ minden $v \in V$-re. Legyen G az a gráf, amely G'-ből keletkezik az ut él hozzávételével. A konstrukcióból következik, hogy G kielégíti a (4.27) és (4.26) feltételeket. • •

Következmény 4.6.3 (Lovász és Cherkasskij) *Legyen $G = (U, E)$ irányítatlan gráf és legyen $T \subseteq U$ olyan, hogy minden $v \in U - T$ pont foka páros. Ekkor az élidegen T-utak maximális száma egyenlő a $\sum(\lambda_G(v, T - v) : v \in T)$ értékkel, vagy ekvivalensen fogalmazva, létezik egy olyan élidegen utakból álló útrendszer, amelynek mindegyik tagja (különböző) T-beli pontokat köt össze, és mindegyik $v \in T$ pontra az onnan induló és $T - v$-ben végződő utak egy maximális v és $T - v$ közötti élidegen útrendszert alkotnak.*

Biz. Feltehető, hogy a gráf összefüggő. A tétel triviális, ha $U = T$, így feltehető, hogy létezik $s \in U - T$ pont. Legyen $V = U - s$ és $m(v)$ az s és v közötti párhuzamos élek száma.

A $\lambda_G(v, T - v)$ számot rövidítsük $\lambda_G(v)$-vel. Legyen $X \subseteq V$-re $p(X) := (\lambda_G(v) - d_{G-s}(X))^+$, ha valamely $v \in T$-ra $X \cap T = \{v\}$ és $p(X) := 0$ egyébként. Könnyű ellenőrizni, hogy p pozitívan ferde szupermoduláris, továbbá, hogy $p(X) + \widetilde{m}(X)$ páros, ha $p(X) > 0$. Így a 4.6.1 tétel alapján az s-nél lévő élek úgy párba állíthatók, hogy a párok leemelésével keletkező G' gráfra $\lambda_{G'}(v) = \lambda_G(v)$ minden $v \in T$ fennáll. Indukció alapján a kívánt útrendszer létezik G'-ben, de akkor a leemeléseket visszacsinálva kapjuk, hogy létezik G-ben is. •

Következmény 4.6.4 *Legyen $H = (V, A)$ olyan irányítatlan gráf, amely lefedhető k erdővel, azaz amelyre*

$$b(X) := k(|X| - 1) - i_G(X) \geq 0 \text{ minden } \emptyset \subset X \subseteq V\text{-re.} \tag{4.29}$$

Legyen $m : V \to \mathbf{Z}_+$ fokszámelőírás, amelyre $\widetilde{m}(V)$ páros. Akkor és csak akkor létezik olyan $G = (V, E)$ gráf, amelyre

$$d_G(v) = m(v) \text{ minden } v \in V\text{-re,} \tag{4.30}$$

és $G + H$ lefedhető k erdővel, azaz

$$i_G(X) + i_H(X) \geq k(|X|) - 1) \text{ minden } \emptyset \neq X \subseteq V\text{-re,} \tag{4.31}$$

ha

$$\widetilde{m}(X) - \widetilde{m}(V - X) \leq 2b(X) \text{ minden } \emptyset \neq X \subseteq V\text{-re} \tag{4.32}$$

vagy ekvivalensen

$$\widetilde{m}(Y) \leq b(Y) + \widetilde{m}(V)/2 \text{ minden } \emptyset \neq Y \subseteq V\text{-re.} \tag{4.33}$$

Biz. Ha létezik a kívánt G gráf, akkor $2b(X) = 2[k(|X| - 1) - i_H(X) \geq 2i_G(X) = \widetilde{m}(X) - d_G(X) = \widetilde{m}(X) - d_G(V - X) \geq \widetilde{m}(X) - \widetilde{m}(V - X)$, és így (4.32) teljesül. Az elegendőség igazolásához legyen $p'(X) := (\widetilde{m}(X) - 2b(X))^+$. Ekkor p' pozitívan metsződ szupermoduláris, és így $p(X) := \max(p(X), p(V - X))$ pozitívan ferde szupermoduláris és szimmetrikus. Továbbá $\widetilde{m}(V)$ párossága miatt $p(X) > 0$ esetén $\widetilde{m}(X) + p(X)$ páros. A 4.6.1 tétel alapján létezik egy G gráf, amely kielégíti a (4.26) és (4.27) feltételeket. Könnyen látszik, hogy (4.26)-ból következik (4.31). •

TÉTEL 4.6.5 *Legyen $q \geq 0$ egészértékű, pozitívan ferde szupermoduláris, szimmetrikus halmazfüggvény. Legyen $\gamma \geq 0$ egész. Akkor és csak akkor létezik a (V, E^*) teljes gráf élhalmazán értelmezett $c : E^* \to \mathbf{R}_+$ függvény, amelyre*

$$d_c(X) \geq q(X) \text{ minden } X \subseteq V \text{ részhalmazra,} \tag{4.34}$$

és $\widetilde{c}(E^*) \leq \gamma$, ha V minden $\{X_1, \ldots, X_t\}$ részpartíciójára

$$\sum q(X_i) \leq 2\gamma. \tag{4.35}$$

Ha (4.35) teljesül c választható félegész értékűnek.

Biz. Ha a kívánt c létezik, akkor $2\gamma \geq 2\widetilde{c}(E^*) \geq \sum d_c(X_i) \geq \sum q(X_i)$, azaz (4.35) valóban szükséges. Az elegendőség bizonyításához legyen $m' : V \to \mathbf{Z}_+$ olyan függvény, amelyre $\widetilde{m}'(V)$ minimális és $\widetilde{m}'(X) \geq q(X)$ minden $X \subseteq V$-re.

Állítás 4.6.1 $\widetilde{m}'(V) \leq 2\gamma$.

Biz. Legyenek $X_1, \ldots, X_t$ maximális pontos halmazok. Miután q pozitívan ferde szupermoduláris, igaz, hogy metsző ezek páronként diszjunktak. Mivel m' minimális, minden olyan $t \in V$ eleme, amelyre $m'(t) > 0$, benne van pontos halmazban, így benne van $\cup_i X_i$-ben. De ekkor $\widetilde{m}'(V) = \widetilde{m}'(\cup_i X_i) = \sum_i \widetilde{m}'(X)_i = \sum_i q(X_i) \geq 2\gamma$. •

Alkalmazzuk a 4.6.1 tételt $m := 2m'$ és $p := 2q$-ra. A tétel által biztosított G gráfnak $\widetilde{m}(V)/2 = \widetilde{m}'(V)$ éle van, ami legfeljebb 2γ. Jelölje $c(uv)$ a G-ben u és v közötti árhuzamos élek számának felét. Ez félegész értékű, teljesíti (4.34)-t és $\widetilde{c}(E^*) \geq \gamma$. •

Következmény 4.6.6 *Legyen H hipergráf, $r(u,v)$ $(\forall u,v \in V)$ alsó korlát a megnövelt lokális élösszefüggőségre, és $\gamma \geq 0$ egész. Akkor és csak akkor létezik a (V,E^*) teljes gráf élhalmazán értelmezett $c : E^* \rightarrow \mathbf{R}_+$ függvény, amelyre $\widetilde{c}(E^*) \leq \gamma$ és a teljes gráf éleit c kapacitással H-hoz adva minden $\{u,v\}$ pontpárra a lokális élösszefüggőség legalább $r(u,v)$, ha V minden $\{X_1,\dots,X_t\}$ részpartíciójára*

$$\sum_i [R_r(X_i) - d_H(X_i)] \leq 2\gamma \tag{4.36}$$

teljesül, ahol $R_r(X) := \max(r(u,v) : u \in X, v \in V - X)$. Ha (4.36) teljesül c választható félegész értékűnek.

Biz. Alkalmazhatjuk a 4.6.5 tételt, csupán azt kell megfigyelnünk, hogy a $p(X) := (R_r(X) - d_H(X))^+$ függvény pozitívan ferde szupermoduláris. •

5. Fejezet

ALGORITMUSOK

Ebben a fejezetben néhány érdekes algoritmussal ismerkedünk meg.

5.1 Győri tétele algoritmikusan

Az alábbiakban algoritmikus bizonyítást adunk Győri tételére. Legyen $P = (v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, e_n, v_n)$ egyszerű irányított út, ahol az e_i irányított él töve v_{i-1} és feje v_i. Jelöljük a P csúcsainak halmazát V-vel. Legyen $\mathcal{F} := \{F_1, \ldots, F_k\}$ a P részútjainak egy rendszere. A következőkben úton általában az út élhalmazát értjük. Egy I út kezdőpontját $b(I)$-vel, végpontját pedig $j(I)$-vel jelöljük.

Azt mondjuk, hogy P részútjainak egy $\mathcal{B}$ rendszere **generálja** $\mathcal{F}$-t vagy hogy $\mathcal{B}$ **generátora** $\mathcal{F}$-nek, ha $\mathcal{F}$ minden tagja előáll néhány $\mathcal{B}$-beli út egyesítéseként. Például $\mathcal{F}$ saját magának generátora, és az egyelemű utakból álló $\{e_1, \ldots, e_n\}$ rendszer is generálja $\mathcal{F}$-t. Jelölje $\gamma(\mathcal{F})$ az $\mathcal{F}$ generátorainak minimális elemszámát.

Azt mondjuk, hogy egy F útból és annak egy e éléből álló (F, e) pár **reprezentált utat** alkot. Jelöljük $\mathcal{F}_r$-rel az olyan (F, e) reprezentált utak halmazát, amelyekre $F \in \mathcal{F}$.

Legyen $\mathcal{I} := \{I_1, \ldots, I_t\}$ a P részútjainak egy családja és legyen $\mathcal{R} := \{f_1, f_2, \ldots, f_t\}$ egy reprezentáló rendszer, azaz az f_i irányított élek különböző elemei P-nek és $f_i \in I_i$ minden $i = 1, \ldots, t$-re. Azt mondjuk, hogy $\mathcal{R}$ **erős reprezentáló rendszer**, ha $I_i \cap I_j$ nem tartalmazza f_i és f_j mindegyikét (i, j, $1 \leq i < j \leq t$). Ebben az esetben a reprezentált utak $\{(I_1, f_1), (I_2, f_2), \ldots, (I_t, f_t)\}$ családját **független**nek nevezzük. Az $\mathcal{I} := \{I_1, \ldots, I_t\}$ **erősen reprezentálható**, ha létezik erős reprezentáns rendszere.

Jelölje $\sigma(\mathcal{F})$ az $\mathcal{F}$-ben lévő lévő erősen reprezentálható utak maximális számát. Könnyen látható, hogy ha $\mathcal{R}$ erősen reprezentálható útrendszer, akkor $\mathcal{R}$-t nem lehet $|\mathcal{R}|$-nél kevesebb úttal generálni. Ebből következik, hogy utak tetszőleges $\mathcal{F}$ rendszerére $\sigma(\mathcal{F}) \leq \gamma(\mathcal{F})$. Győri tétele azt állítja, hogy itt valójában egyenlőség szerepel:

TÉTEL 5.1.1 (Győri Ervin) *A P út részútjainak bármely $\mathcal{F}$ családjára fennáll $\sigma(\mathcal{F}) = \gamma(\mathcal{F})$.*

Biz. Csak a nem-triviális $\sigma \geq \gamma$ egyenlőtlenséget igazoljuk.

Jelölje $\mathcal{F}_r$ a reprezentált utak halmazát. $\mathcal{F}_r$ egy (F, f) tagját **lényegesnek** mondjuk, ha nincs olyan F' ($\neq F$) tagja $\mathcal{F}$-nek, amelyre $f \in F' \subset F$. $\mathcal{F}_r$ minden (F, f) lényeges tagjának megfeleltetünk egy (X_K, X_B) halmaz-párt, ahol X_B az F út f-t követő pontjaiból áll, míg $V - X_K$ az F út f-t megelőző pontjaiból. Jelölje $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}$ az így kapott halmaz-párok családját.

Az algoritmus három fázisból áll. Az elsőben a lényeges párok $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}$ családjából kiválasztunk egy keresztezés-mentes $\mathcal{K}$ részrendszert. A második fázisban Dilworth tételt alkalmazzuk $\mathcal{K}$-ra és az ismert algoritmus segítségével (amely a Dilworth tételnek Kőnig tételre való visszavezetésén és ezáltal az alternáló utas módszeren alapul) $\mathcal{K}$-nak meghatározunk egy maximális $\mathcal{I}$ független részét valamint egy minimális lánc-felbontását. A láncfelbontás irányított élek egy olyan F rendszerének felel meg, amelyek lefogják az $\mathcal{K}$-ban szereplő valamennyi halmaz-párt. Az algoritmus harmadik fázisában F-t átalakítjuk úgy, hogy elemszáma ne változzék és $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}$-nek minden tagját lefogja.

1. Fázis Végigmegyünk a P út élein az $e_1, \ldots, e_n$ sorrendben és az $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}$ tagjait két csoportba soroljuk, $\mathcal{K}$-ba és $\mathcal{T}$-be. Kezdetben mindkét csoport üres. Az $\mathcal{T}$ tagjaira a későbbiek során, mint tiltott párokra hivatkozunk.

Az általános lépésben tekintjük az e_i élt és az összes $(I_1, e_i), (I_2, e_i), \ldots, (I_k, e_i)$ lényeges párt. Mivel ezen párok lényegesek, az I_j utak élhalmazai egymást nem tartalmazzák és a végpontjaik páronként különbözőek. Következésképp feltehető, hogy ezen utak úgy vannak indexelve, hogy $b(I_1) < \ldots < b(I_k)$ és $j(I_1) < \ldots < j(I_k)$. Mindegyik (I_j, e_i) nem tiltott párt bevesszük $\mathcal{K}$-ba, és egy ilyen bevételkor letiltjuk (azaz $\mathcal{T}$-be tesszük) az összes olyan (I_h, e_l) lényeges párt, amelyre $j < h \leq k$, $l > i$ és $e_l \in I_j$.

A konstrukcióból könnyen látszik, hogy az 1. fázis végén kapott $\mathcal{K}$ rendszer keresztezés-mentes lesz.

2. Fázis Alkalmazzuk a Dilworth tételt $\mathcal{K}$-ra és számítsunk ki egy $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{K}$ független rész-rendszert és $\mathcal{K}$-nak egy minimális lánc-felbontását, amely egy olyan F élrendszernek felel meg, amely $\mathcal{K}$ minden tagját lefogja, és amelyre $|F| = |\mathcal{I}|$.

3. Fázis Amennyiben F lefogja $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}$ valamennyi tagját, akkor készen vagyunk. Tegyük fel tehát, hogy van olyan (I, f) lényeges pár, amelyet F nem fog le. Válasszuk (I, f)-t úgy, hogy az I-nek az f élt megelőző csúcsainak $(I, f)^-$ halmaza minimális legyen. Mivel (I, f)-t F nem fogja le, így (I, f) tiltva lett (azaz $\mathcal{T}$-be került), vagyis van a $\mathcal{K}$-nak olyan (J, e) tagja, amelyre $\{e, f\} \subseteq I \cap J$, e megelőzi f-t és J megelőzi I-t. Válasszunk egy ilyen (J, e) párt úgy, hogy $(J, e)^+$ minimális legyen.

Az (I, f) és (J, e) párok lényegesek, így mind az (I, e), mind a (J, f) pár lényeges. Az $(I, f)^-$ minimalitásából következik, hogy F lefogja az $((I, e)^-, (I, e)^+)$ párt.

Lemma 5.1.2 $(J, f) \in \mathcal{K}$.

Biz. Amennyiben (J, f) tiltott volna, úgy az algoritmus előírása miatt volna egy (J', e') tagja $\mathcal{K}$-nak úgy, hogy J' megelőzi J-t és $\{e', f\} \subseteq J' \cap J$. Nem lehet, hogy e' megelőzi e-t, mert akkor (J, e) is tiltott lett volna, holott $(J, e) \in \mathcal{K}$. Ezek szerint e' vagy egyenlő e-vel, vagy követi e-t. De ekkor $(J', e')^+ \subset (J, e)^+$, ellentétben $(J, e)^+$ minimális választásával. •

Ezek alapján F lefogja mind (I, e)-t, mind (J, f)-t. Jelölje az (I, e)-t lefogó élt $f_1 = x_1y_1$ és a (J, f)-t lefogó élt $f_2 = x_2y_2$. Legyen $f_1' := x_1y_2$, $f_2' := x_2y_1$ és legyen $F' := F - \{f_1, f_2\} \cup \{f_1', f_2'\}$. Mivel f_1 és f_2 sem fogja le (I, f)-t, a szóbanforgó pontok az alábbi sorrendben követik egymást.

$$b(J) \leq x_2 < b(I) \leq x_1 \leq b(e) < y_1 \leq b(f) < y_2 \leq j(J) < j(I). \tag{12.1}$$

Ebből rögtön adódik, hogy az f_1' él lefogja az eddig lefogatlan (I, f) párt.

Lemma 5.1.3 *Ha F lefogott egy (I', f') lényeges párt, akkor F' is lefogja.*

Biz. Ez nyilván így van, ha (I', f')-t az F-nek egy f_1-től és f_2-től különböző tagja fogta le. Az is rögtön látszik, hogy minden f_2 által legfogott párt f_1' és f_2' valamelyike lefogja. Tehát az egyetlen problematikus eset az, amikor (I', f')-t az F-ből egyedül az f_1 él fogja le.

Tegyük fel indirekt, hogy f_1' és f_2' egyike sem fogja le (I', f')-t. Abból hogy f_1' nem fogja le (I', f')-t, következik, hogy $j(I') < y_2$. Abból hogy f_2' nem fogja le (I', f')-t, következik, hogy $b(I') > x_2$. Ezért $e \in I' \subseteq J$, ami ellentmond annak, hogy (J, e) lényeges pár. •

A lemmából kapjuk, hogy F' szigorúan több lényeges párt fog le, mint amennyit F lefogott. Így a fenti átcserélési műveletet legfeljebb annyiszor alkalmazva, mint ahány tagja az input útcsaládnak van, $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}$-nek egy olyan lefogását kapjuk, amelynek elemszáma megegyezik az $\mathcal{I}$ független rész-rendszer elemszámával. • •

Megjegyzés A fenti algoritmusnak és bizonyításnak egy másik változata is elmondható, ki-ki választhat melyik szimpatikusabb. Eltérés a harmadik fázisban van. A módosított 3. fázisban csupán a $\mathcal{K}$-val és annak F lefogásával foglalkozunk. Amennyiben van F-nek két olyan $f_1 = x_1y_1$ és $f_2 = x_2y_2$ éle, amelyekre

$$x_2 < x_1 < y_1 < y_2$$

és $F' := F - \{f_1, f_2\} \cup \{f_1', f_2'\}$ is lefogja $\mathcal{K}$-t, úgy cseréljük ki F-t F'-re. Könnyen látszik hogy legfeljebb n^3 ilyen egymás utáni csere létezhet.

Tegyük most fel, hogy F olyan lefogása $\mathcal{K}$-nak, amelyben már ilyen csere nem hajtható végre.

Lemma 5.1.4 *Ha F olyan fedése $\mathcal{K}$-nak, amelyre nézve a fenti csere már nem hajtható végre, akkor F lefogja az összes lényeges párt.*

Biz. Tegyük fel indirekt, hogy F nem fogja le az (I, i) lényeges párt. Válasszuk ezt úgy, hogy $|(I, i)^-|$ minimimális. Mivel (I, i) nincs lefogva, így nem tartozik $\mathcal{K}$-hoz, azaz létezik az 1. Fázis szabálya szerint egy olyan (J, j) tagja $\mathcal{K}$-nak amelyre j megelőzi i-t és (J, j) keresztezi (I, i)-t. Válasszunk egy ilyen (J, j) párt úgy, hogy $|(J, j)^+|$ minimális. Miután (I, i) és (J, j) lényegesek, az (I, j) és (J, i) párok is azok. Az $|(I, i)^-|$ minimalitásából következik, hogy F lefogja (I, j)-t, azaz van olyan $e_1 = x_1y_1 \in F$ él, amely lefogja (I, j)-t.

Állítás 5.1.1 $(J, i) \in \mathcal{K}$.

Biz. Ha indirekt (J, i) a $\mathcal{T}$-hez tartozna, akkor az 1. Fázis szabálya szerint létezik egy olyan (J', j') tagja $\mathcal{K}$-nak, amelyre j' megelőzi i-t és (J', j') keresztezi (J, i)-t. A j' él nem előzheti meg j-t, mert különben (J', j') keresztezné (J, j)-t és emiatt (J, j) is $\mathcal{T}$-hez tartozna. Így aztán vagy $j' = j$ vagy pedig j megelőzi j'-t. Mindkét esetben (J', j') keresztezi (I, i)-t és $(J', j')^+ \subset (J, j)^+$, ellentmondásban a $|(J, j)^+|$. minimális választásával. $\bullet$

Mivel F lefogja $\mathcal{K}$-t és $(J, i) \in \mathcal{K}$, az előbbi állítás miatt van olyan $e_2 = x_2 y_2$ eleme C-nek, amely lefogja (J, i)-t. Mivel sem e_1, sem e_2 nem fogja le (I, i)-t, azt kapjuk, hogy

$$b(J) \leq x_2 < b(I) \leq x_1 \leq b(j) < y_1 \leq b(i) < y_2 \leq j(J) < j(I).$$

A lemma feltétele alapján F-ben nincsen két átcserélhető elem, így kell léteznie olyan (K, k) tagnak $\mathcal{K}$-ban, amelyet F' nem fog le, ekkor (K, k)-t szükségképpen e_1 lefogja, míg e_1' és e_2' nem. Ezért $b(J) \leq x_2 < b(K) \leq x_1 < y_1 \leq j(K) < y_2 \leq j(J)$, azaz, $j \in K \subset J$, ellentmondásban a feltevéssel, hogy (J, j) lényeges. $\bullet$ $\bullet$

2013. május 14. lgyori

5.2 A Lucchesi-Younger tétel algoritmikusan

Egy $D = (V, A)$ digráfot akkor mondtunk erősen összefüggőnek, ha bármely pontjából minden másikba vezet irányított út. Nevezzük a digráf pontjainak egy X részhalmazát **mag**nak, ha nem lép ki belőle él. A mag **triviális**, ha $\emptyset$ vagy V. Ha egy X magba lép be él, akkor a X-be belépő élek $\varrho(X)$ halmazát neveztük egyirányú (más néven irányított) vágásnak. Ismert megfigyelés, hogy D pontosan akkor erősen összefüggő, ha nincs nemtriviális magja, azaz nem létezik egyirányú vágás.

Egy $D = (V, A)$ digráf éleinek valamely F részhalmazát **irányított kötés**nek vagy röviden **kötés**nek nevezzük, ha F elemeinek összehúzása erősen összefüggő digráfot eredményez. Kötés akkor létezik, ha D irányítatlan értelemben összefüggő, így ezt a továbbiakban feltesszük. Látszik, hogy F pontosan akkor kötés, ha elemeinek fordítottját D-hez adva erősen összefüggő digráfot kapunk, ami még azzal is ekvivalens, hogy F minden egyirányú vágást lefog.

Korábban már találkoztunk a minimális kötés elemszámára vonatkozó Lucchesi-Younger tétellel illetve annak a kikeresztezési technikán alapuló nem-algoritmikus bizonyításával. Jelen célunk egy alternatív, algoritmikus bizonyítás leírása, amelynek segítségével polinom időben kiszámítható a szóbanforgó minimum illetve maximum.

TÉTEL 5.2.1 (Lucchesi és Younger) *$D = (V, A)$ irányított gráfban a minimális kötés τ elemszáma egyenlő az élidegen egyirányú vágások maximális ν számával.*

Biz. Feltehetjük, hogy D irányítatlan értelemben összefüggő. Nyilván $\nu \leq \tau$. Az egyenlőség igazolásához leírunk egy algoritmust, amely megkonstruál egy F kötést és talál $|F|$ darab élidegen egyirányú vágást.

A magok metszetre-unióra zárt rendszert alkotnak. Valamely X nemüres magra jelölje $\sigma^*(X)$ az X elhagyásával keletkező komponensek számát. Nyilván $\sigma^*(\emptyset) = 1$ és $\sigma^*(V) = 0$.

Lemma 5.2.2 *A magokon értelmezett σ^* függvény szupermoduláris.*

Biz. Ha X és Y mag, akkor $d(X, Y) = 0$. Tekintsük az X és Y halmazok által feszített élek $I(X)$ és $I(Y)$ halmazát. Miután $d(X, Y) = 0$,

$$I(X \cup Y) = I(X) \cup I(Y) \text{ és } I(X \cap Y) = I(X) \cap I(Y). \tag{5.1}$$

Jelölje r az irányítatlan értelemben vett gráf körmatroidjának rangfüggvényét. Mivel r szubmoduláris és $r(I(X)) = |X| - \sigma^*(V - X)$, így a σ^* szupermodularitása következik. •

Legyen a σ függvény ugyanaz, mint a σ^*, azzal az eltéréssel, hogy $\sigma(\emptyset) = 0$. Ekkor σ metsző szupermoduláris a magokon. Rögtön látszik, hogy egy $F \subseteq A$ kötésre és X magra $\varrho_F(X) \geq \sigma(X)$, ahol $\varrho_F(X)$ az X-be belépő F-beli élek számát jelöli. (Ez az egyenlőtlenség az üres X halmaz kivételével a σ^* függvényre is igaz. Azért kell a σ^* helyett a σ-val dolgoznunk, hogy az egyenlőtlenség mindenhol érvényes legyen).

Egy nemtriviális X magot valamint a hozzá tartozó $\varrho(X)$ egyirányú vágást **pontos**nak hívunk (F-re nézve), ha $\sigma(X) = \varrho_F(X)$. Mivel a V alaphalmazra $\sigma(V) = 0 = \varrho_F(V)$, így a V magot is pontosnak tekintjük, bár ehhez nem tartozik egyirányú vágás. Amennyiben $\varrho_F(X) = 1$, **1-pontos** magról ill. vágásról beszélünk. Látható, hogy minden nemtriviális magú pontos vágás felbomlik 1-pontos vágások diszjunkt uniójára (éspedig a $D - X$ komponensei által meghatározott vágásokra), továbbá minden nemtriviális pontos mag 1-pontos magok metszete. A szokásos technikával igazolható, hogy:

Lemma 5.2.3 *Metsző pontos magok metszete és uniója pontos.* •

Ebből rögtön következik, hogy egy v pontot tartalmazó pontos halmazok $B_F(v) = B(v)$ metszete pontos. A $B(v)$ halmaz tehát a v-t tartalmazó egyértelmű legszűkebb pontos halmaz.

$B(v)$ a következőképp számolható. Ha $B(v)$ nem az egész V, akkor $B(v)$ a v-t tartalmazó 1-pontos halmazok metszete. Készítsünk egy D^+ segédgráfot úgy, hogy minden A-beli él egy párhuzamos példányát és minden F-beli él megfordítottját adjuk D-hez. Ekkor persze D^+ erősen összefüggő.

Állítás 5.2.1 *$B(v)$ azon u csúcsokból áll, amelyekbe D^+-ban vezet v-ből 2 élidegen út, azaz $\lambda(v, u : D^+) \geq 2$.*

Biz. Ha létezik X 1-pontos $v\bar{u}$-mag, akkor D^+-ban X-ből egyetlen él lép ki (éspedig az X-be belépő egyetlen F-beli él megfordítottja), tehát ilyenkor $\lambda(v, u : D^+) \leq 1$. Megfordítva, ha $\lambda(v, u : D^+) = 1$, úgy a Menger tétel miatt létezik egy X $v\bar{u}$-halmaz, amelyből D^+-ben az egyetlen xy él lép ki. A konstrukció miatt X mag, amelyre yx az egyetlen F-beli él, amely D-ben belelép, vagyis X 1-pontos. •

Gyakorlat 5.1 *Pontos halmazokból álló összefüggő hipergráf ponthalmaza is pontos.*

Az algoritmus tetszőleges F kötésből indul ki (ami kezdetben lehet például egy feszítő fa). Az általános lépésben vagy egy kisebb kötést talál, vagy pedig $|F|$ élidegen egyirányú vágást. Készítsünk el egy $D' = (V, A')$ segédgráfot és az élhalmazán egy c' költség-függvényt a következőképpen. $A - F$ minden eleme A'-höz tartozik és a költsége $+1$. Az F elemeit megfordítva tegyük A'-be és ezen fordított élek költsége legyen -1. Végül minden v pontba vezessünk

$B(v)$ minden pontjából egy 0 költségű ún. **ugró** élt. uv pontosan akkor ugró él, ha nem lép be 1-pontos magba. Mivel eredeti él megfordítottja nem lép be semmilyen magba, minden A-beli él megfordítottja ugró él lesz.

A közismert algoritmussal döntsük el, hogy létezik-e D'-ben a c' költség-függvényre nézve negatív kör. Keressünk egyet, ha van, illetve keressünk egy π megengedett (egészértékű) potenciált, ha nincs.

1. eset *D'-ben nincs negatív kör, azaz létezik π egészértékű megengedett potenciál.*

Állítás 5.2.2 *Ha uv ugró él, akkor*

$$\pi(v) \leq \pi(u). \tag{5.2}$$

Ha $uv \in A - F$, akkor

$$\pi(v) \leq \pi(u) + 1. \tag{5.3}$$

Ha $uv \in F$, akkor

$$\pi(v) \geq \pi(u) + 1. \tag{5.4}$$

Biz. uv ugró élre $\pi(v) - \pi(u) \leq c'(uv) = 0$, azaz $\pi(v) \leq \pi(u)$. Ha $uv \in A - F$, akkor uv él D'-ben, így $\pi(v) - \pi(u) \leq c'(uv) = 1$, azaz $(v) \leq \pi(u) + 1$. Ha $uv \in F$, akkor vu él D'-ben, így $\pi(u) - \pi(v) \leq c'(vu) = -1$, azaz $\pi(v) \geq \pi(u) + 1$. •

Feltehető, hogy π minimális értéke 0, hiszen a π konstanssal történő eltolása a megengedettséget nem befolyásolja. Jelölje t a π maximális értékét. Feltehető, hogy 1 és t között valamennyi i értékre a

$$\{v : \pi(v) = i\} \text{ halmaz nem üres,} \tag{5.5}$$

mert ha az volna, akkor módosítsuk π-t úgy, hogy $\pi(v) > i$ esetén eggyel csökkentjük. Miután c' $0, \pm 1$ értékű, továbbra is megengedett potenciált kapunk. Ezt a változtatást mindaddig csinálhatjuk, amíg (5.5) nem teljesül.

Legyen $V_i := \{v : \pi(v) \geq i\}$ $(i = 1, 2, \ldots, t)$, ahol t a π maximális értéke. Ekkor (5.5) miatt $V \supset V_1 \supset \ldots \supset V_t$. Semelyik V_i-be sem lép be ugró él, mert ha uv belépne, akkor $\pi(v) > \pi(u)$, ellentétben az állítással. Következik, hogy D-ben V_i-ből nem lép ki él, azaz V_i mag. Az állításból az is látható, hogy minden $uv \in A - F$ él legfeljebb egy V_i-be lép be és minden $uv \in F$ él legalább egybe.

Állítás 5.2.3 *A V_i maghoz tartozó $\varrho(V_i)$ egyirányú vágás felbontható 1-pontos egyirányú vágások diszjunkt uniójára.*

Biz. Mivel V_i-be nem lép be ugró él, minden $v \in V_i$ pontra $B(v) \subseteq V_i$, és ezért a $\{B(v) : v \in V_i\}$ hipergráf komponenseinek $Z_1, \ldots, Z_l$ ponthalmazai a V_i partícióját alkotják. A 5.1 gyakorlat alapján mindegyik Z_j mag pontos, továbbá a $\varrho(Z_j)$ vágások partícionálják a $\varrho(V_i)$ vágást. Miután minden nemtriviális pontos vágás diszjunkt 1-pontos vágások uniója, az állítás következik. •

Ha tehát az 1. eset áll fenn, akkor találtunk egyirányú vágásoknak egy olyan rendszerét, amelynek minden tagját F pontosan egyszer fogja le, minden $A - F$ beli él legfeljebb egyikükben van benne, minden F-beli él pedig legalább egyikükben. Ekkor mindegyik F-beli élhez a rendszerből bármelyik olyat kiválasztva, amelyben ő benne van, $|F|$ darab páronként élidegen egyirányú vágást kapunk.

2. eset *A D' segédgráfban létezik negatív kör.*

Legyen C olyan negatív kör, amely minimális abban az értelemben hogy nincs C-nek két olyan nem egymást követő a, b pontja, amelyekre a-ból b-be vezet ugró él és a körön a b-től a-ig vezető P ív költsége negatív. Tetszőleges negatív körből kiindulva egy ilyen értelmű minimális negatív kört algoritmikusan is könnyen megkaphatunk, hiszen a szóbanforgó ab ugró él létezése esetén $P + ab$ kisebb élszámú negatív kört ad.

Lemma 5.2.4 *A C kör ugró élei elrendezhetők egy olyan $e_1 = u_1v_1, e_2 = u_2v_2, \ldots, e_k = u_kv_k$ sorba, amelyben semelyik u_j-ből sem vezet ugró él v_i-be, ahol $i < j$.*

Biz. C minden ugró élének feleltessünk meg egy új pontot és ezek közül valamely x pontból egy másik y-ba vezessünk élt, ha az x-hez tartozó ugró él tövéből vezet ugró él az y-hoz tartozó ugró él fejébe. A lemma állítása azzal ekvivalens, hogy az így nyert H segédgráf pontjainak van topologikus sorrendje (olyan sorrend, amelyben későbbi pontból korábbiba nem vezet él.) Ismert, hogy aciklikus digráfnak létezik topológikus sorrendje. Tegyük ezért fel indirekt, hogy H-ban van irányított kör. Ez azt jelenti, hogy C bizonyos ugró élei ciklikusan sorbarendezhetők az $f_1 = s_1t_1, f_2 = s_2t_2, \ldots, f_m = s_mt_m$ sorrendbe úgy, hogy s_it_{i+1} ugró él (ahol $t_{m+1} = t_1$). Legyen C_i a C körnek az az íve, amely t_{i+1}-ből vezet s_i-be. A C-re tett minimalitási feltevés alapján C_i költsége nemnegatív.

Könnyen látható, hogy a C minden nem-ugró éle ugyanannyi C_i ívhez tartozik. Jelöljük ezt a számot q-val $(q > 0)$. Következik, hogy a C költségének q-szorosa a C_i ívek költségének összege, ami nemnegatív, ellentétben a C kör negatív voltával. •

Módosítsuk F-t a következőképpen. Hagyjuk ki belőle azokat az éleket, amelyeknek megfordítottja a D' segédgráf szóbanforgó C körében van, és vegyük hozzá $A - F$ azon uv elemeit, amelyeknek megfelelő D'-beli uv élek C-ben vannak. A keletkezett halmazt jelölje F'. Miután C negatív kör volt, $|F'| < |F|$. Belátjuk, hogy F' kötés. Jelölje rendre $\delta^u(X)$ illetve $\varrho^u(X)$ a C kör azon ugró éleinek a számát, melyek X-ből kilépnek illetve X-be belépnek.

Állítás 5.2.4 *Tetszőleges X magra* $\varrho_{F'}(X) = \varrho_F(X) + \delta^u(X) - \varrho^u(X)$.

Biz. Jelölje $\delta^1(X)$ a C körnek az X-ből kilépő nem ugró éleinek a számát. Mivel X mag, ezen élek mindegyikének megfordítottja F-beli. Jelölje $\varrho^1(X)$ a C körnek az X-be belépő nem ugró éleinek a számát. Mivel X mag, ezek mindegyike $A-F$-ben is benne van. Emiatt $\varrho^u(X)+\varrho^1(X) = \varrho_C(X) = \delta_C(X) = \delta^u(X)+\delta^1(X)$, azaz $\delta^u(X)-\varrho^u(X) = \varrho^1(X) - \delta^1(X)$. Másrészt az F' definíciójából $\varrho_{F'}(X) = \varrho_F(X) + \varrho^1(X) - \delta^1(X) = \delta^u(X) - \varrho^u(X)$. •

Állítás 5.2.5 *X nemüres magra*

$$\varrho_F(X) - \sigma(X) \geq \varrho^u(X). \tag{5.6}$$

Biz. $\varrho^u(X)$ szerinti indukció. Legyen $\Delta_F(X) := \varrho_F(X) - \sigma(X)$. Ez mindig nemnegatív, hiszen F kötés, továbbá éppen akkor 0, ha X pontos. Az egyenlőtlenség $\varrho^u(X) = 0$ esetén semmitmondó, így legyen $\varrho^u(X) > 0$ és legyen $e_i = u_i v_i$ a C-nek az az ugró éle, amely belép X-be és a 5.2.4 lemmában megadott sorrendben a legkisebb indexű. Legyen $B := B(v_i)$. Ha most $u_j v_j$ egy másik ugró éle C-nek, amely belép X-be, akkor $j > i$, és állítjuk, hogy $u_j \notin B$. Ha ugyanis u_j B-ben volna, akkor $u_j v_i$ is ugró él lenne, ellentétben a sorrendezés tulajdonságával. Így tehát $\varrho^u(X \cup B) = \varrho^u(X) - 1$. Most $\Delta_F(X) + 0 = \Delta_F(X) + \Delta_F(B) \geq \Delta_F(X \cap B) + \Delta_F(X \cup B) \geq 1 + \Delta_F(X \cup B) \geq 1 + \varrho^u(X \cup B) = \varrho^u(X)$, ahol az utolsó egyenlőtlenség az indukciós feltevésből adódik. •

A 5.2.4 és 5.2.5 állításokat összevetve kapjuk, hogy $\varrho_{F'}(X) = \varrho_F(X) - \varrho^u(X) + \delta^u(X) \geq \varrho_F(X) - \varrho^u(X) \geq \sigma(X)$, vagyis F' valóban kötés.

A 2. eset fennállásakor tehát egy olyan kötést találtunk, amely kisebb a kiindulási kötésnél. Emiatt, ha az eljárást iteráljuk, a 2. eset legfeljebb $n-1$ előfordulása után bizonyosan az 1. eset következik be. • • •

2013. május 14.file : llyalg

5.3 Részbenrendezett halmazok láncai és antiláncai

Legyen $P = \{p_1, \dots, p_n\}$ részbenrendezett halmaz. Egy lánc elemszámát néha a lánc **hosszának** nevezik. A leghosszabb lánc hossza a részbenrendezett halmaz **magassága**. A legnagyobb antilánc elemszáma részbenrendezett halmaz **szélessége**.

5.3.1 A Dilworth tétel és polárisa

Először a magasságra és a szélességre vonatkozóan két fontos tételt bizonyítunk. Az első meglehetősen egyszerű (néha a Dilworth tétel polárisának hívják):

TÉTEL 5.3.1 (poláris Dilworth) *A P-t fedő antiláncok minimális $c = c(P)$ száma egyenlő a leghosszabb lánc hosszával, vagyis P magasságával.*

Biz. Világos, hogy max $\leq$ min. Az egyenlőség igazolásához jelölje A_1 a minimális elemek halmazát. Ez nyilván antilánc. Jelölje c' a $P' := P - A_1$ magasságát. Indukcióval P' felbontható c' darab antiláncra, így P felbontható $c' + 1$ darab antiláncra. Másrészt P' bármely eleme nagyobb, mint A_1 valamelyik eleme, és ezért P' bármely lánca megnövelhető egy A_1-beli elemmel, vagyis P-ben van $c' + 1$ elemű lánc. •

A fenti induktív bizonyítás könnyen algoritmussá alakítható, amely megtalál egy antilánc felbontást és egy láncot, melyekre egyenlőség áll.

Legyen A_1 a P minimális elemeinek halmaza. Legyen A_2 az A_1 elhagyása után a minimális elemek halmaza. Ezt folytatva megkonstruáljuk az $A_1, \dots, A_c$ antiláncokból álló felbontását P-nek. Most visszafelé haladva előállítunk egy c elemből álló láncot. Legyen a_c az A_c antilánc tetszőleges eleme. Az a_c elem nem került bele A_{c-1}-be, ezért van A_{c-1}-nek egy a_c-nél kisebb a_{c-1} eleme. Ez az elem nem került A_{c-2}-be, tehát van A_{c-2}-ben egy a_{c-2} elem, amely kisebb, mint a_{c-1}. Ezt az eljárást folytatva, megkapunk egy c elemű láncot.

Feladat 5.2 *Igazoljuk, hogy egy legalább $kl+1$ tagú számsorozatban vagy van $k+1$ tagú monoton növő rész-sorozat, vagy van $l+1$ tagú szigorúan monoton csökkenő rész-sorozat. Előfordulhat-e, hogy mind a két rész-sorozat létezik?*

Érvényes tételt kapunk, ha a 5.3.1 tételben a lánc és antilánc szavakat felcseréljük:

TÉTEL 5.3.2 (Dilworth) *A P-t fedő láncok minimális $a = a(P)$ száma egyenlő a legnagyobb antilánc elemszámával, vagyis P szélességével.*

Biz. A max $\leq$ min egyenlőtlenség ismét nyilvánvaló. A fordított irány igazolásához készítsünk el egy $G = (X, Y; E)$ páros gráfot, melynek mindkét osztálya a P halmaznak felel meg és valamely x_i elem y_j-vel akkor van összekötve, ha $p_i > p_j$. (x_i NINCS összekötve y_i-vel.)

Lemma 5.3.3 *G tetszőleges M párosításának megfelel P-nek egy $n - |M|$ láncból álló felbontása.*

Biz. Tekintsük az X halmaz M által fedetlen pontjait. Ezek száma $n - |M|$. Legyen x_i olyan pont, amelyet M nem fed. Mindegyik ilyen x_i elemhez megkonstruálunk egy C_i láncot, a következőképpen. Ha y_i fedetlen, akkor C_i álljon az egyetlen p_i elemből. Ha y_i-t fedi valamely M-beli $x_j y_i$ él, akkor $p_j > p_i$, és legyen p_j a lánc következő eleme. Ha y_j-t fedi valamely M-beli $x_k y_j$ él, akkor legyen p_k a lánc következő eleme. Így folytatva, a láncot addig növeljük, amig a lánchoz utolsónak vett p_m elemhez tartozó y_m csúcsot már nem fedi M-beli él.

Íly módon az M által nem fedett $n - |M|$ darab X-beli csúcs mindegyikéhez definiáltunk egy láncot P-ben. A lemma következik abból, hogy az így kapott láncok páronként diszjunktak és lefedik P-t. •

Lemma 5.3.4 *Legyen $S \subseteq X \cup Y$ a páros gráf éleinek minimális lefogása. Ekkor P-ben van olyan A antilánc, amelyre $|S| + |A| = n$.*

Biz. Először belátjuk, hogy ha $x_i \in S$, akkor $y_i \notin S$. Ha indirekt mindkét csúcs S-ben volna, akkor S minimalitása miatt a gráfnak létezne olyan $x_i y_j$ illetve $x_k y_i$ éle, melyekre $y_j, x_k \notin S$. Ekkor tehát $p_k > p_i > p_j$, amiből $p_k > p_j$, és így $x_k y_j$ éle a gráfnak. Ezt az élt viszont nem fogja le S, amely ellentmondás azt bizonyítja, hogy valóban nem lehet x_i és y_i mindegyike S-ben.

Legyen most $A := \{p_i : x_i \notin S, y_i \notin S\}$. Rögtön látszik, hogy az A halmaz kielégíti a lemma követelményeit. •

A két lemmát felhasználva Dilworth tétele rögtön következik a Kőnig tételből, ami szerint egy páros gráfban a független élek maximális száma egyenlő az éleket lefogó pontok minimális számával. • •

5.3.2 Két általánosítás

A Dilworth tétel kitejesztéseként megvizsgáljuk, hogy $\alpha \geq 1$ antilánc egyesítése maximum milyen nagy lehet, a polár Dilworth tétel kitejesztéseként pedig azt, hogy $\gamma \geq 1$ lánc egyesítése maximum milyen nagy lehet, Valamely $\mathcal{B}= \{B_1, B_2, \ldots, B_k\}$ családra használjuk az $\cup\mathcal{B} = \cup(B_i : i = 1, \ldots, k)$ jelölést. A $\mathcal{C}_\gamma = \{C_1, C_2, \ldots, C_\gamma\}$ **lánc-családon** γ darab diszjunkt nemüres láncból álló családot értünk. Jelölje $\mathbf{C}_\gamma$ a γ láncból álló lánc-családok halmazát, míg $\mathbf{C}$ az összes lánc-családot magába foglaló halmazt. Legyen $c_\gamma = \max\{| \cup \mathcal{C}_\gamma| : \mathcal{C} \in \mathbf{C}_\gamma\}$, vagyis c_γ a legnagyobb halmaz elemszáma, amely előáll γ lánc egyesítéseként (azaz a Dilworth tétel alapján nem tartalmaz γ-nál nagyobb elemszámú antiláncot).

Az $\mathcal{A}_\alpha = \{A_1, A_2, \ldots, A_\alpha\}$ **antilánc-családon** α darab diszjunkt nemüres antiláncból álló családot értünk. Jelölje $\mathbf{A}_\alpha$ az α antiláncból álló antilánc-családok halmazát, míg $\mathbf{A}$ az összes antilánc-családot magában foglaló halmazt. Legyen $a_\alpha = \max\{| \cup \mathcal{A}_\alpha| : \mathcal{A}_\alpha \in \mathbf{A}_\alpha\}$, vagyis a_α a legnagyobb olyan halmaz elemszáma, amely előáll α antilánc egyesíteseként (azaz a poláris Dilworth tétel alapján nem tartalmaz α-nál nagyobb elemszámú láncot).

Dilworth tétele szerint $c_a = n$, a poláris Dilworth tétel szerint $a_c = n$. Mi mondható c_γ-ról $(1 \leq \gamma \leq a)$ és a_α-ról $(1 \leq \alpha \leq c)$?

TÉTEL 5.3.5 (Greene és Kleitman, 1976) $a_\alpha = \min\{q\alpha + |P - \cup\mathcal{C}_q| : \mathcal{C}_q \in \mathbf{C}\}$.

TÉTEL 5.3.6 (Greene, 1976) $c_\gamma = \min\{q\gamma + |P - \cup\mathcal{A}_q| : \mathcal{A}_q \in \mathbf{A}\}$.

Miután egy láncnak és egy antiláncnak legfeljebb egy közös eleme lehet, a_α és c_γ legfeljebb akkora, mint a szóbanforgó minimum.

DEFINÍCIÓ Az $\mathcal{A}_\alpha = \{A_1, A_2, \ldots, A_\alpha)$ antilánc-család és a $\mathcal{C}_\gamma = \{C_1, C_2, \ldots, C_\gamma\}$ lánc-család **ortogonális**, ha

$$P = (\cup\mathcal{A}_\alpha) \cup (\cup\mathcal{C}_\gamma) \tag{5.7}$$

és

$$A_i \cap C_j \neq \emptyset \text{ hacsak } 1 \leq i \leq \alpha,\ 1 \leq j \leq \gamma, \tag{5.8}$$

azaz a lánc-család és az antilánc-család együttesen lefedi P-t és mindegyik A_i antilánc metszi az összes C_j láncot.

A 5.3.5 és 5.3.6 tételek nemtriviális részeit átfogalmazhatjuk az alábbiak szerint.

TÉTEL 5.3.7 *Minden α-ra, $1 \leq \alpha \leq c$, létezik $\mathcal{A}_\alpha \in \mathbf{A}_\alpha$ és $\mathcal{C}_\gamma \in \mathbf{C}$, valamely γ-ra, amelyek ortogonálisak.*

TÉTEL 5.3.8 *Minden γ-ra, $1 \leq \gamma \leq a$, létezik $\mathcal{C}_\gamma \in \mathbf{C}_\gamma$ és $\mathcal{A}_\alpha \in \mathbf{A}$, valamely α-ra, melyek ortogonálisak.*

A két tétel közös általánosításának bizonyítása a minimális költségű folyam algoritmuson fog alapulni. Elevenítsük ezt fel.

5.3.3 Minimális költségű folyam algoritmus

Legyen adva $D = (V, A)$ irányított gráf az s forrás- és a t nyelőponttal. Adott még az éleken a g nemnegatív kapacitás függvény és a c nemnegatív költségfüggvény. Feltesszük, hogy g egészértékű. Minden 0 és M közé eső k egészre szeretnénk egy olyan k nagyságú folyamot találni, melynek költsége minimális. Egy z folyam **költségét** a $cz = \sum[c(e)z(e) : e \in A]$ skaláris szorzattal definiáljuk. Azt mondjuk, hogy a z st-folyam **minimális költségű folyam**, ha z a legkisebb költségű a megengedett, z-vel azonos nagyságú st-folyamok közül.

Ismertetjük Ford és Fulkerson [1962] algoritmusát. Legyen $\pi : V \to \mathbf{Z}_+$ olyan függvény a V-n, amelyre $\pi(s) = 0 \leq \pi(v) \leq \pi(t)$ minden $v \in V$-re. Ilyen függvényt **potenciálnak** hívunk. Használni fogjuk a következő jelölést. $\bar{c}(uv) = c(uv) - \pi(v) + \pi(u)$, ahol $uv \in A$. Potenciálok segítségével egy z folyam cz költségére az alábbi alsó korlátot nyerhetjük.

$\sum c(uv)z(uv) = \sum[\pi(v) - \pi(u)]z(uv) + \sum \bar{c}(uv)z(uv) = \pi(t)k + \sum[\bar{c}(uv)z(uv) : \bar{c}(uv) < 0] + \sum[\bar{c}(uv)z(uv) : \bar{c}(uv) > 0] \geq \pi(t)k + \sum \bar{c}(uv)g(uv) + 0.$

Ebből következik, hogy egy z folyam bizonyosan minimális költségű, amennyiben létezik olyan π potenciál, amelyre az egyenlőtlenség egyenlőséggel teljesül. Ez pontosan akkor van így, ha fennáll a következő két optimalitási feltétel.

$$\pi(v) - \pi(u) < c(uv) \Rightarrow z(uv) = 0, \tag{i}$$

$$\pi(v) - \pi(u) > c(uv) \Rightarrow z(uv) = g(uv). \tag{ii}$$

Minden lehetséges egész k értékre megkonstruálunk egy minimális költségű k nagyságú folyamot. Az eljárás az azonosan nulla folyammal és az azonosan nulla potenciállal indul. Ezután a folyam nagyságát növeljük egyenként, illetve menetközben néha a potenciált növeljük úgy, hogy az optimalitási feltételek végig fennállnak. Az algoritmus akkor ér véget, amikor maximális nagyságú folyamot illetve egy minimális vágást kaptunk.

ITERATÍV LÉPÉS Az általános helyzetben adott a z folyam és a π potenciál, és ezek kielégítik az (i) és (ii) feltételeket. Megkonstruálunk egy $D' = (V, A')$ segédgráfot a következőképpen. D'-nek kétféle éle van: előre és hátra. Egy uv él **előre él**, ha $uv \in A, \bar{c}(uv) = 0$ és $z(uv) < g(uv)$. Egy uv él **hátra él**, ha $vu \in A, \bar{c}(vu) = 0$ és $z(vu) > 0$.

Legyen S az s-ből D'-ben irányított úton elérhető pontok halmaza. Két eset lehetséges.

1. Eset *$t \notin S$, azaz t nem elérhető s-ből.*

Legyen $\varepsilon_1 = min\{\bar{c}(uv) : uv \in \delta^+(S), z(uv) < g(uv)\}$ és $\varepsilon_2 = min\{-\bar{c}(uv) : uv \in \delta^+(V - S), z(uv) > 0\}$, ahol az üres halmazon vett minimumot ∞-nek definiáljuk. Legyen $\varepsilon = min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Az optimalitási feltételek és az S definíciója miatt ε pozitív.

Amennyiben $\varepsilon = \infty$, akkor az algoritmus végetér. Ebben az esetben az S-ből kilépő eredeti élek mind telítettek, míg az S-be belépő eredeti élek mindegyikén a folyam nulla. Így tehát $\delta_g^+(S) = val(z)$, az aktuális z folyam maximális nagyságú és az S-ből kilépő élek halmaza minimális vágást határoz meg.

Legyen most $\varepsilon < \infty$, és módosítsuk π-t úgy, hogy minden $v \in V - S$-re növeljük $\pi(v)$-t ε-nal. Az S és az ε definíciójából rögtön kapjuk:

Állítás 5.3.1 *A módosított potenciál és a változatlanul hagyott z folyam kielégíti az optimalitási feltételeket.*

Készítsük el az új segédgráfot és ismételjük meg az eljárást. Figyeljük meg, hogy a segédgráfban a régi S által feszített élek változatlanok maradnak és ezért az s-ből elért pontok halmaza szigorúan bővebb lesz, mint S. Ezért az 1. eset legfeljebb $|V| - 1$-szeri előfordulása után biztosan vagy az $\varepsilon = \infty$ következik be, vagypedig az alábbi 2. eset.

2. Eset *$t \in S$, vagyis t elérhető s-ből.* Legyen P a D'-ben egy s-ből t-be vezető irányított út. Módosítsuk z-t a következőképpen. Legyen $z'(uv) = z(uv) + 1$, ha uv a P-nek előre éle és legyen $z'(uv) = z(uv) - 1$, vu a P-nek hátra éle.

A módosításból adódik:

Állítás 5.3.2 *A módosított folyam és változatlanul hagyott potenciál kielégíti az optimalitási feltételeket.*

Ezzel az algoritmus leírását be is fejeztük. Lényegében M darab növelésre van szükségünk (2. eset), így az eljárás polinomimális, amennyiben mind az M minimális költségű folyamot meg kell határoznunk.

5.3.4 A közös általánosítás

A 5.3.7 és 5.3.8 tételek közös általánosítása így hangzik:

TÉTEL 5.3.9 *A $P = \{p_1, \ldots, p_n\}$ részbenrendezett halmaz szélessége legyen $a = a(P)$, magassága $c = c(P)$. Létezik egy olyan $\mathcal{C}_a|\ \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_{i_1}|\ \mathcal{C}_{a-1}, \mathcal{C}_{a-2}, \ldots, \mathcal{C}_{a-j_1}|\ \mathcal{A}_{i_1+1}, \ldots, \mathcal{A}_{i_2}|\ \mathcal{C}_{a-j_1-1}, \ldots, \mathcal{C}_{a-j_2}| \ldots$ sorozat, amely a $\mathcal{C}_a, \mathcal{C}_{a-1}, \ldots, \mathcal{C}_1$ és az $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_c$ sorozatok összefésülésével keletkezik, ahol $\mathcal{C}_j \in \mathbf{C}_j$ és $\mathcal{A}_i \in \mathbf{A}_i$, és a sorozat bármely tagjára* (akár $\mathcal{C}_j$, akár $\mathcal{A}_i$) *fennáll, hogy ortogonális az utolsó őt megelőző ellentétes típusú tagra.* (Vagyis, $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_{i_1}$ ortogonális $\mathcal{C}_a$-ra, $\mathcal{C}_{a-1}, \mathcal{C}_{a-2}, \ldots, \mathcal{C}_{a-j_1}$ mindegyike ortogonális $\mathcal{A}_{i_1}$-re, stb.)

Biz. Feleltessünk meg P-nek egy $D = (V, A)$ irányított gráfot, ahol $V := \{s, t, x_1, x_2, \ldots, x_n,\ y_1, y_2, \ldots, y_n\}$, és $A := \{(s, x_i) : i = 1, 2, \ldots, n\} \cup \{(y_i, t) : i = 1, 2, \ldots, n\} \cup \{x_i y_j : \text{ha } p_i \geq p_j\}$. Legyen minden e él kapacitása $g(e) \equiv 1$, míg a költsége $c(e) = 1$, ha $e = x_i y_i$ és 0 különben.

Alkalmazzuk a Ford és Fulkerson féle minimális költségű folyam algoritmust. Legyen z és π az algoritmus egy közbenső állapotához tartozó folyam illetve potenciál. Ekkor z $0-1$-értékű, π nemnegatív, $\pi(s) = 0$ és kielégítik a következő optimalitási feltételeket.

$$\pi(v) - \pi(u) < c(uv) \Rightarrow z(uv) = 0, \qquad (i)$$

$$\pi(v) - \pi(u) > c(uv) \Rightarrow z(uv) = g(uv). \qquad (ii)$$

Írjuk fel, hogy a különféle élekre mit jelentenek az optimalitási feltételek.
$x_i y_i$ típusú élre:

$$\pi(y_i) - \pi(x_i) < 1 \Rightarrow z(x_i y_i) = 0, \qquad (i)$$

$$\pi(y_i) - \pi(x_i) > 1 \Rightarrow z(x_i y_i) = 1. \qquad (ii)$$

$x_i y_j$ típusú élre (tehát amikor $p_i > p_j$):

$$\pi(y_j) - \pi(x_i) < 0 \Rightarrow z(x_i y_j) = 0, \qquad (i)$$

$$\pi(y_j) - \pi(x_i) > 0 \Rightarrow z(x_i y_j) = 1. \qquad (ii)$$

sx_i típusú élre:

$$\pi(x_i) < 0 \Rightarrow z(sx_i) = 0, \qquad (i)$$
$$\pi(x_i) > 0 \Rightarrow z(sx_i) = 1. \qquad (ii)$$

$y_i t$ típusú élre:

$$\pi(y_i) > \pi(t) \Rightarrow z(y_i t) = 0, \qquad (i)$$
$$\pi(y_i) < \pi(t) \Rightarrow z(y_i t) = 1. \qquad (ii)$$

Lemma 5.3.10 *Minden $i = 1, \dots, n$-re*

$$\pi(y_i) \le \pi(x_i) + 1. \tag{5.9}$$

Biz. Az (5.9) fennáll az algoritmus kezdetén. A folyamnövelési lépés nem befolyásolja (5.9)-t, egy potenciálcsere pedig csak akkor ronthatja el, ha a csere előtt $\pi(y_i) = \pi(x_i)+1$ állt és x_i elérhető volt a D' segédgráfban, miközben y_i nem. Ebben az esetben $\pi'(y_i) = \pi'(x_i)+2$ érvényes a módosított π' potenciálra. Az (ii) feltétel (ha π'-re alkalmazzuk) maga után vonja, hogy $z(x_i y_i) = 1$. Ezért $z(sx_i) = 1$ és a D' segédgráfnak az egyetlen x_i-be lépő éle $y_i x_i$. De ez ellentmond az indirekt feltevésnek, hogy x_i elérhető, míg y_i nem. •

Lemma 5.3.11 *Ha $p_i > p_j$ és $z(x_i y_j) = 1$, akkor $\pi(x_i) = \pi(y_j)$.*

Biz. Amikor folyamnöveléssel a $z(x_i y_j)$ érték 0-ról 1-re nőtt, akkor $x_i y_j$ éle D'-nek és emiatt $\pi(y_i) - \pi(x_j) = c(x_i y_j) = 0$. Az ezt követő potenciálcserék során, amíg $z(x_i y_j) = 1$, az (i) feltétel alapján a $\pi(y_j) \ge \pi(x_i)$ egyenlőtlenség biztosan érvényben marad. Ráadásul egy potenciálcserét követően a $\pi'(y_j) = \pi'(x_i)+1$ helyzet sem jöhet létre, mert ekkor x_i elérhető volna D'-ben az s-ből, miközben y_j nem, ami viszont nem lehetséges, miután $y_j x_i$ az egyedüli él D'-ben, amely belép x_i-be. •

Jelölje P' azon p_h elemek halmazát, melyekre $z(x_h y_h) = 0$. Ekkor a Dilworth tétel bizonyításában látottakhoz hasonlóan azon $x_i y_j$ $(i < j)$ élek halmaza, melyekre $z(x_i y_j) = 1$, megfelel egy $\mathcal{C}_\gamma$ lánc-családnak, ahol $\gamma = n - val(z)$, és ez a lánc-család a P' partícióját adja. $\alpha := \pi(t)$-re definiáljunk egy $\mathcal{A}_\alpha = \{A_1, A_2, \dots, A_\alpha\}$ családot, ahol $A_i = \{p_j : \pi(x_j) + 1 = \pi(y_j) = i\}$.

Lemma 5.3.12 *$\mathcal{A}_\alpha$ antilánc-családot alkot, amely ortogonális $\mathcal{C}_\gamma$-ra.*

Biz. Először mutassuk meg, hogy mindegyik A_i antilánc. Valóban, ha indirekt $p_m, p_j \in A_i$ valamely $p_m > p_j$ elemekre, akkor $\pi(y_j) - \pi(x_m) = 1$, és ezért (ii) alapján, $z(x_m, y_j) = 1$, ellentétben a 5.3.11 lemmával.

(5.7) igazolása érdekében legyen p_m olyan elem, amely nincs $P' = \cup\mathcal{C}_\gamma$-ban, ami azzal ekvivalens, hogy $z(x_m, y_m) = 1$. Ekkor (i) miatt $\pi(y_m) - \pi(x_m) \ge 1$, így a 5.3.10 lemma miatt $\pi(y_m) - \pi(x_m) = 1$. Vagyis $\pi(y_m)$-t i-vel jelölve $p_m \in A_i$, tehát (5.7) fennáll.

Igazoljuk végül, hogy $A_i \cap C_j \neq \emptyset$ $(1 \le i \le \alpha, 1 \le j \le \gamma)$. Álljon a C_j lánc mondjuk a $p_1 > \ldots > p_k$ elemekből $(k \ge 1)$. Ekkor $z(y_1 t) = 0$, így (ii) miatt $\pi(y_1) \ge \pi(t)$, amiből persze $\pi(y_1) = \pi(t) = \alpha$. Hasonlóan $z(sx_k) = 0$, így (i) miatt $\pi(x_k) \le 0$, amiből $\pi(x_k) = 0$. A 5.3.11 lemmából kapjuk, hogy $\pi(x_1) = \pi(y_2), \pi(x_2) = \pi(y_3), \dots, \pi(x_{k-1}) = \pi(y_k)$. Ezt a 5.3.10 lemmával összevetve kapjuk, hogy a $0 = \pi(x_k), \pi(y_k), \pi(y_{k-1}), \pi(y_{k-2}), \dots, \pi(y_1) = \alpha$ egész számokból álló sorozat olyan, hogy minden tagja legfeljebb eggyel nagyobb a megelőzőnél. Íly módon minden i-re $(1 \le i \le \alpha)$ kell olyan m indexnek lennie, amelyre $\pi(x_m) = \pi(y_m) + 1 = i$. Vagyis $p_m \in C_j \cap A_i$. •

Tegyük most fel, hogy a minimális költségű folyamot kiszámító algoritmus a következőképpen futott le. Kiindulva a π azonosan nulla potenciálból és a z azonosan nulla folyamból, a folyam nagysága egyenként k_0-ig nő, a potenciál nagysága (ami definíció szerint a $\pi(t)$ érték) egyenként i_1-ig, azután ismét a folyam nagysága k_1-ig, …, stb. Végül a folyam nagysága k_q-ra, a potenciál nagysága i_q-ra nő. Az algoritmus a maximális nagyságú folyam elérésekor ér véget, amely nagyság esetünkben n, azaz $k_q = n$.

Legyen $a := n - k_0$ és $j_i := k_i - k_0$ $(i = 1, 2, \dots, q)$. Az utolsó lemma alapján az algoritmus $(k_0, 1)$ paraméterekkel jellemzett fázisához a $\mathcal{C}_a$ a tagú lánc-család és az $\mathcal{A}_1$ egytagú antilánc-család tartozik, melyek ortogonálisak egymásra. Ezután a potenciál nagysága, mint már említettük, egyenként i_1-re nő. A közbenső helyzetekhez tartozó $\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3, \dots, \mathcal{A}_{i_1}$ antilánc-családok ortogonálisak a változatlan $\mathcal{C}_a$-ra. Ezután a folyam értéke egyenként k_1-re nő. A közbenső helyzetekhez tartozó $\mathcal{C}_{a-1}, \mathcal{C}_{a-2}, \dots, \mathcal{C}_{a-j_1}$ lánc-családok ortogonálisak a változatlan $\mathcal{A}_{i_1}$-re, és így tovább. Ezzel a tétel bizonyítását és az algoritmus ismertetését befejeztük. • •

Feladat 5.3 *Dilworth után nevezzünk egy maximális (azaz a elemszámú) antiláncot* **D-antilánc***nak. Igazoljuk, hogy a diszjunkt D-antiláncok maximális száma egyenlő a D-antiláncokat lefogó elemek minimális számával.* (Segítség: Tekintsük a 5.3.9 tételben leírt sorozat $\mathcal{A}_{i_1}|\ \mathcal{C}_{a-1}$ tagjait.)

6. Fejezet

EGYENSÚLYI IRÁNYÍTÁSOK

A **??** fejezetben már igazoltuk a következő tételt (**??** tétel).

TÉTEL 6.0.13 (Nash-Williams gyenge irányítási tétele, 1960) *A G irányítatlan gráf éleit akkor és csak akkor lehet úgy irányítani, hogy az eredményül kapott irányított gráf k-élösszefüggő, ha G $2k$-élösszefüggő.*

A feltétel elegendőségének bizonyítása a $2k$-élösszefüggő gráfok konstruktív előállításán alapult (amely Lovász leemelési tételét használta). Megjegyezzük, hogy egy alternatív bizonyítás szubmoduláris áramokat használ. Nash-Williams valójában egy sokkal erősebb tételt bizonyított. Ennek megfogalmazásához egy G irányított vagy irányítatlan gráfban $\lambda(x, y; G)$ jelölje a **lokális él-összefüggőséget** x-ből y-ba, ami tehát az x-ből y-ba vezető élidegen utak maximális száma.

TÉTEL 6.0.14 (Nash-Williams erős irányítási tétele, 1960) *Minden $G = (V, E)$ irányítatlan gráfnak van olyan $D := \vec{G}$ irányítása, amelyre*

$$\lambda(x, y; D) = \lfloor \lambda(x, y; G)/2 \rfloor \text{ érvényes minden } x, y \in V \text{ pontpárra.} \tag{6.1}$$

Ráadásul az irányítás olyannak is választható, amelyben minden pont be- és kifoka legfeljebb eggyel tér el.

Nash-Williams egy olyan irányítást, amely kielégíti (6.1)-t **egyensúlyi**nak nevez. Ha G $2k$-élösszefüggő, akkor $\lambda(x, y; G) \geq 2k$ minden x, y pontpárra, és ezért az erős irányítási tételből következik a gyenge nemtriviális iránya.

Adott $s, t \in U$ elemekre és $X \subseteq U$ részhalmazra azt mondjuk, hogy X egy $s\bar{t}$**-halmaz,** ha $s \in X, t \notin X$. X **elválasztja (szeparálja)** s**-t** t**-től** (vagy s-t és t-t), ha $|X \cap \{s, t\}| = 1$.

A 6.0.14 tétel bizonyítása. Nash-Williams kiindulási megfigyelése az, hogy a tétel triviális Euler-gráfokra, hiszen tetszőleges Euler-irányítás jó lesz. Ha a gráf nem Euler-féle, akkor először hozzáadunk a páratlan fokú pontoknak egy ,,alkalmas" M párosítását (aminek élei nem szükségképpen a gráfból valók), majd a keletkező Euler-gráfnak veszünk egy di-Euler irányítását, végül kihagyjuk az M (megirányított) éleit. Természetesen az így kapott irányításról csak akkor várhatjuk el, hogy kielégíti (6.1)-t, ha az M párosítás eleget tesz bizonyos kívánalmaknak.

Egy f egész számra vagy egészértékű függvényre legyen $\hat{f} := 2\lfloor f/2.\rfloor$ Definiáljuk az $R = R_G$ halmaz-függvényt a következőképpen. $R(\emptyset) := R(V) := 0$ és $\emptyset \subset X \subset V$-re legyen $R(X) := \max\{\lambda(x, y; G) : X \text{ elválasztja } x, y\text{-t}\}$. Ugyanezt a függvényt korábban használtuk már Mader leemelési tételének bizonyításában. Szükségünk lesz a

$$b_G(X) := d_G(X) - \hat{R}_G(X) \tag{6.2}$$

halmazfüggvényre, amely egyfajta értelemben az X halmaz többletét méri.

A Menger tétel irányított él-változata alapján (6.1) azzal ekvivalens, hogy

$$\varrho(X) \geq \hat{R}_G(X)/2 \text{ minden } X \subseteq V-\text{ re,} \tag{6.3}$$

ahol ϱ jelöli a D irányítás befok függvényét. Legyen M a G páratlan fokú pontjainak egy párosítása. Az M-t **megengedett páratlan-pont párosítás**nak nevezzük, ha

$$d_M(X) \leq b_G(X) \text{ fennáll minden } X \subseteq V \text{ halmazra,} \tag{6.4}$$

ahol $d_M(X)$ jelöli azon M-beli elemek számát, melyeknek pontosan egy végpontja van X-ben. Világos, hogy $b_G \geq 0$ és $d_M(X) \equiv b_G(X)$ $(mod\ 2)$ minden $X \subseteq V$-re. Ebből (6.4) mindig igaz, ha $|X|$ vagy $|V - X|$ legfeljebb egyelemű. Ilyen X halmazt **triviális**nak nevezünk. Mármost Nash-Williams párosítási tétele a következő.

TÉTEL 6.0.15 (Párosítási tétel) *Minden irányítatlan gráfnak van megengedett páratlan-pont párosítása.*

A tétel bizonyítását megelőzően lássuk be, hogy implikálja az erős irányítási tételt. Valóban, tekintsük a $G+M$ Euler-gráf egy di-Euler-féle irányítását, és jelölje ϱ' illetve ϱ a D' és $D := D' - M$ digráfok befok függvényét. (Itt D a G-nek egy irányítása). Kapjuk: $\varrho(X) \geq \varrho'(X) - d_M(X) = (d_G(X) + d_M(X))/2 - d_M(X) = (d_G(X) - d_M(X))/2 \geq \hat{R}_G(X)/2$, amiből (6.3) és a 6.0.14 tétel következik.

A 6.0.15 tétel bizonyítása. Feltehetjük, hogy G összefüggő.

Tegyük fel, hogy egy X halmaz diszjunkt nemüres A, B halmazok uniója és $d_G(A,B) = 0$ (azaz A és B között nem vezet G-ben él).

Állítás 6.0.3 *Ha egy M párosítás X-re megsérti* (6.4)*-t, akkor A vagy B valamelyikére is megsérti.*

Biz. Ha nem sértené meg, akkor $d_M(X) \leq d_M(A) + d_M(B) \leq d_G(A) - \hat{R}_G(A) + d_G(B) - \hat{R}_G(B) = d_G(X) - \hat{R}_G(A) - \hat{R}_G(B) \leq d_G(X) - \hat{R}_G(X)$. •

A 6.0.3 állításból adódan (6.4)-t valójában elegendő csak olyan X halmazokra megkövetelni, amelyek összefüggő részgráfot feszítenek. Sőt emiatt valójában elegendő (6.4)-t csak olyan X halmazokra megkívánni, melyekre mind X, mind $V - X$ összefüggő részgráfot feszít.

Azt is feltehetjük, hogy G 2-élösszefüggő. Ha nem ez a helyzet, akkor egy elvágó élt három párhuzamos éllel helyettesíthetünk. Könnyen ellenőrizhető, hogy a kapott gráf megengedett párosítása egyúttal G-nek is megengedett párosítása. $|E| + |V|$ szerinti indukciót használunk.

Feltehető továbbá, hogy nincsen másodfokú pont, mert ha mondjuk u ilyen, akkor az u-ba menő ux és uy élt egy új xy élre cseréljük, a keletkező G' gráfnak indukció alapján már van megengedett párosítása és ez nyilván G-ben is megengedett lesz.

A következő lemma könnyen adódik az $\hat{R}$ definíciójából.

Lemma 6.0.16 *Bármely két $X, Y \subseteq V$ halmazra a következő négy állítás közül legalább az egyik fennáll.*

$$\hat{R}(X) \leq \hat{R}(X \cup Y) \text{ és } \hat{R}(Y) \leq \hat{R}(X \cap Y), \tag{6.5}$$

$$\hat{R}(Y) \leq \hat{R}(X \cup Y) \text{ és } \hat{R}(X) \leq \hat{R}(X \cap Y), \tag{6.6}$$

$$\hat{R}(X) \leq \hat{R}(X - Y) \text{ és } \hat{R}(Y) \leq \hat{R}(Y - X), \tag{6.7}$$

$$\hat{R}(Y) \leq \hat{R}(X - Y) \text{ és } \hat{R}(X) \leq \hat{R}(Y - X). \tag{6.8}$$

Ebből kapjuk:

Lemma 6.0.17 *Tetszőleges $X, Y \subseteq V$ halmazokra a következő egyenlőtlenségek közül legalább az egyik teljesül.*

$$\hat{R}(X) + \hat{R}(Y) \leq \hat{R}(X \cap Y) + \hat{R}(X \cup Y), \tag{6.9}$$

$$\hat{R}(X) + \hat{R}(Y) \leq \hat{R}(X - Y) + \hat{R}(Y - X). \tag{6.10}$$

Továbbá, ha

$$R(X) \leq \min\{R(X \cap Y), R(X \cup Y)\}, \tag{6.11}$$

akkor (6.9) *fennáll.* •

Először tegyük fel, hogy van olyan nem-triviális $X \subset V$ halmaz, amelyre $b_G(X) = 0$. Jelölje G_1 és G_2 azokat a gráfokat, amelyek G-ből az X illetve a $(V - X)$ halmazok egy pontra húzásával keletkeznek. Könnyen látszik, hogy bármely $Z \subseteq V - X$ halmazra $R_{G_1}(Z) \geq R_G(Z)$ és innen $b_{G_1}(Z) \leq b_G(Z)$. Hasonlóképp $b_{G_2}(Z) \leq b_G(Z)$ érvényes minden $Z \subseteq X$ halmazra. Indukció alapján létezik G_i-nek egy M_i megengedett páratlan-pont párosítása $(i = 1, 2)$. Mivel $d_G(X)$ páros, az összehúzott pontok páros fokúak, és így $M := M_1 + M_2$ páratlan-pont párosítása G-nek. Azt állítjuk, hogy M megengedett, vagyis hogy $d_M(Y) \leq b_G(Y)$ fennáll minden $Y \subseteq V$ részhalmazra. Ennek igazolásához feltehetjük, hogy (6.9) van érvényben, mert különben Y-t helyettesíthetjük a komplementerével, és akkor (6.10) (6.9)-ba transzformálódik. Felhasználva, d_M szubmodularitását valamint d_M és $\hat{R}$ szimmetrikusságát, azt nyerjük, hogy $d_M(Y) = d_M(X \cap Y) + d_M(X \cup Y) = d_{M_2}(X \cap Y) + d_{M_1}(V - (X \cup Y)) \leq b_{G_2}(X \cap Y) + b_{G_1}(X \cup Y) \leq b_G(X \cap Y) + b_G(X \cup Y) \leq b_G(X) + b_G(Y) = b_G(Y)$, azaz M valóban megengedett páratlan-pont párosítás G-ben.

Íly módon a következő esetre jutottunk:

$$b_G(X) > 0 \text{ minden nem-triviális } X \subset V \text{ -re.} \tag{6.12}$$

Tegyük most fel, hogy van egy olyan $f = uv$ él G-ben, amely két páratlan fokú pontot köt össze, és legyen $G' := G - f$. Indukció alapján G'-ben van egy M' megengedett páratlan-pont párosítás.

Azt állítjuk, hogy $\hat{\lambda}(x, y; G') = \hat{\lambda}(x, y; G)$ minden $x, y \in V$ pontpárra. Tegyük fel ugyanis, hogy az x, y pontokra $\hat{\lambda}(x, y; G') < \hat{\lambda}(x, y; G)$. Ekkor $\lambda(x, y; G') = \lambda(x, y; G) - 1$ és $\lambda(x, y; G)$ páros. Menger tétele szerint van olyan X $x\overline{y}$-halmaz, amelyre $d_G(X) = \lambda(x, y; G)$ és X elválasztja u-t és v-t. Feltehetjük, hogy $|X| \leq |V - X|$, mert különben

X-t kicserélhetjük a komplementerével. Most $b_G(X) = 0$ és így (6.12) miatt $|X| = 1$, tehát $X = \{u\}$ vagy $X = \{v\}$. De ez ellentmond a feltevésnek, hogy $d_G(u)$ és $d_G(v)$ páratlan.

Tehát $\hat{\lambda}(x, y; G') = \hat{\lambda}(x, y; G)$ valóban fennáll minden $x, y \in V$ pontpárra. Ekkor $b_{G'}(X) = b_G(X) - 1$ illetve $b_{G'}(X) = b_G(X)$ annak megfelelően, hogy az $X \subseteq V$ halmaz szeparálja vagy nem szeparálja u-t és v-t, és ezért $M' + uv$ megengedett páratlan-pont párosítás G-ben.

Ezek alapján feltehetjük, hogy

$$\text{minden élnek legalább az egyik végpontja páros fokú.} \tag{6.13}$$

Jelölje T a harmadfokú pontok halmazát és legyen $S = V - T$. Hívjunk egy $X \subseteq V$ részhalmazt **lényegtelen**nek, ha X triviális, vagy ha van egy olyan $v \in T \cap X$ csúcs, amelyre $(*)$ $d(v, X - v) \leq 1$, vagy pedig ha van egy olyan $v \in T - X$ csúcs, amelyre $(**)$ $d(v, X) \geq 2$. A többi halmazt nevezzük **lényeges**nek.

Azt állítjuk, hogy az M páratlan-pont párosítás megengedett, ha (6.4) a lényeges halmazokra fennáll. Valóban, (6.4) nyilván igaz triviális halmazokra. Legyen most X olyan halmaz, amelyre (6.4) nem áll, és tételezzük fel, hogy $d_G(X)$ minimális. Állítjuk, hogy X lényeges. Ha ugyanis nem az, akkor vagy van egy olyan $v \in T \cap X$ pont, amelyre $(*)$ fennáll, vagypedig van egy olyan $v \in T - X$ pont, amelyre $(**)$ áll fenn. Legyen $X' := X - v$ az első esetben és $X' := X + v$ a másodikban. Mivel X nem-triviális, így $\emptyset \subset X' \subset V$. Továbbá $d_G(X') \leq d_G(X) - 1$, $\hat{R}(X') = \hat{R}(X)$ és ezért $b_G(X') + 1 \leq b_G(X)$. A $d_G(X)$ minimális választása miatt (6.4) fennáll X'-re, és így $d_M(X) \leq d_M(X') + 1 \leq b_G(X') + 1 \leq b_G(X)$, ellentmondásban az indirekt feltevéssel, miszerint X megsérti (6.4)-t.

Legyen s az S-nek minimális fokszámú pontja. Ha S egyetlen pontból áll, akkor s-t és minden T-beli t pontot három párhuzamos él köt össze, és ekkor G-nek nincs is más éle. Ebben az esetben (6.13) miatt $d_G(s)$ páros, és könnyen láthatóan bármilyen páratlan-pont párosítás megengedett. Ezért feltehetjük, hogy $|S| \geq 2$. Legyen $\lambda_S := \min\{\lambda(x, y; G) : x, y \in S\}$. Nyilván $\lambda_S \leq d_G(s)$.

1. ESET

$$\lambda_S = d_G(s). \tag{6.14}$$

Mader leemelős tétele alapján létezik olyan $e = su, f = st$ élpár, amelyek leemelésével keletkező G' gráfban $\lambda(x, y; G') = \lambda(x, y; G)$ minden $x, y \in V - s$ pontpárra fennáll.

Lemma 6.0.18 *$\hat{R}_{G'}(X) = \hat{R}_G(X)$ minden X lényeges halmazra.*

Biz. Mivel leemeléskor a lokális élösszefüggés sohasem nő, $R_{G'}(X) \leq R_G(X)$ nyilván fennáll.

Feltehetjük, hogy $s \in X$, mert különben X-t helyettesíthetjük a komplementerével. Mivel G' is 2-élösszefüggő (hiszen s foka G-ben legalább 4), a lemma igaz, ha $\hat{R}_G(X) = 2$. Így $\hat{R}_G(X) \geq 4$. Legyenek $u \in X, v \in V - X$ olyan pontok, amelyekre $R_G(X) = \lambda(u, v; G)$. $\hat{R}_G(X) \geq 4$ miatt $u, v \in S$. Ha $R_G(X) > \lambda_S = d_G(s)$, akkor $u, v \neq s$, és így $R_{G'}(X) \geq \lambda(u, v; G') = \lambda(u, v; G) = R_G(X)$, vagyis ilyenkor az lemma igaz.

Feltehetjük tehát, hogy $R_G(X) = \lambda_S = d_G(s)$. Azt állítjuk, hogy $X \cap S \neq \{s\}$. Ha ugyanis $X \cap S = \{s\}$, akkor $X - s$ minden pontja harmadfokú, és (6.13) miatt ezen pontok között nincs él. Az X lényegessége miatt minden $X-s$-beli pontból legalább két él megy s-be és legfeljebb egy él $V-X$-be, amiből az következik, hogy $d_G(s) > d_G(X)$, ellentétben az előbbi egyenlőséggel.

Létezik tehát egy $x \in S \cap X - s$ elem, és ezért $R_{G'}(X) \geq \lambda(x, v; G') = \lambda(x, v; G) \geq \lambda_S = R_G(X)$, amiből a lemma következik. •

Indukció alapján G'-nek létezik egy M megengedett páratlan-pont párosítása. Mivel $d_{G'} \leq d_G$, a lemmából következik, hogy $b_{G'} \leq b_G$, és ezért M a G-nek is megengedett páratlan-pont párosítása.

2. ESET

$$\lambda_S < d_G(s). \tag{6.15}$$

Legyen $x, y \in S$ két olyan pont, amelyre $\lambda(x, y; G) = \lambda_S$ és legyen X olyan $x\bar{y}$-halmaz, amelyre $d_G(X) = \lambda(x, y; G)$. (6.15) miatt X nem-triviális. Továbbá $R_G(X) \geq \lambda(x, y; G) = d_G(X) \geq R_G(X)$ és ezért $d_G(X) = R_G(X)$. Azt kapjuk (6.12)-ból, hogy $R_G(X)$ páratlan és így $b_G(X) = 1$. Érvényes továbbá, hogy X lényeges.

Jelölje G_1 illetve G_2 a G-ből az X illetve a $(V-X)$ halmazok egy pontra történő összehúzásával keletkező gráfokat. Bármely $Z \subseteq V - X$ halmazra $R_{G_1}(Z) \geq R_G(Z)$ és így $b_{G_1}(Z) \leq b_G(Z)$. Hasonlóképpen $b_{G_2}(Z) \leq b_G(Z)$ fennáll $Z \subseteq X$-ra. Indukció alapján G_i-nek $(i = 1, 2)$ van M_i megengedett páratlan-pont párosítása.

Jelölje e_i azt az élét M_i-nek, amely az összehúzott pontot fedi és legyen v_i az e_i él másik végpontja $(i = 1, 2)$. Ekkor $M := M_1 + M_2 - e_1 - e_2 + v_1v_2$ páratlan-pont párosítása G-nek. Azt állítjuk, hogy M megengedett, azaz $d_M(Y) \leq b_G(Y)$ fennáll minden $Y \subseteq V$ részhalmazra. Amint már korábban megfigyeltük, ezt elég lényeges halmazokra igazolni.

Amennyiben $Y \subseteq X$, úgy $d_M(Y) = d_{M_2}(Y) \leq b_{G_2}(Y) \leq b_G(Y)$. Analóg a helyzet, ha $Y \subseteq V - X$. Így feltehetjük, hogy X és Y keresztezik egymást. Az Y esetleges komplementálása nyomán feltehetjük, hogy $d_M(X, Y) = 0$. Miután mind X, mind Y lényeges, (6.13) felhasználásával kapjuk, hogy $S \cap X \cap Y \neq \emptyset$ és $S \cap (V - (X \cup Y)) \neq \emptyset$. Az X választásából következik, hogy $R(X) \leq R(Z)$ minden olyan Z halmazra fennáll, amely szeparálja S két elemét. Ezért (6.11) van évényben és így (6.9) fennáll X, Y-re. Felhasználva (6.3)-t és $\hat{R}$ szimmetrikusságát azt kapjuk, hogy $d_M(Y) = d_M(X \cap Y) + d_M(X \cup Y) - d_M(X) + 2d_M(X, Y) = d_M(X \cap Y) + d_M(X \cup Y) - 1 = d_{M_2}(X \cap Y) + d_{M_1}(V -$

$(X \cup Y)) - 1 \leq b_{G_2}(X \cap Y) + b_{G_1}(X \cup Y) - 1 \leq b_G(X \cap Y) + b_G(X \cup Y) - 1 \leq b_G(X) + b_G(Y) - 1 = b_G(Y)$, amint állítottuk. • •

2013. május 14.file :lir3

Tartalom